B.Ö.Tahirov, F.M.Namazov,

S.N.Əfəndi, E.A.Qasımov, Q.Z.Abdullayeva

Riyaziyyatın tədrisi üsulları

2 0 0 7

Elmi redaktor: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Karlen İskəndər oğlu Xudaverdiyev

Rəyçilər: f.- r.e.d., professor Ə.M.Əhmədov,
f.- r.e.n., dosent V.Ə.Qasımov

Kompüterdə tərtib edən – R.Ə.Yusubova

B.Ö.Tahirov, F.M.Namazov, S.N.Əfəndi, E.A.Qasımov, Q.Z.Abdullayeva

«Riyaziyyatın tədrisi üsulları»

G İ R İ Ş

Praktik fəaliyyətində riyaziyyat müəllimi müxtəlif ədəbiyyatı təhlil etməli, zəruri tədris materialını seçməli, tədris işini planlaşdırmalı və təşkil etməli, şagirdlərin tədris fəaliyyətini idarə etməli və qiymətdəndirməli olur. Bu o deməkdir ki, riyaziyyat müəlliminin fəaliyyəti çoxsaxəlidir: analitik və sintetik fəaliyyət; tədris materialını planlaşdırmaq və tərtib etmək; tədris məşğələlərinin müxtəlif mərhələlərində şagirdlərin fəaliyyətini təşkil etmək və idarə etmək; şagirdlərin işinin yoxlanılmasını təşkil etmək və düzgün qiymətləndirmək və s. Ona görə gələcək riyaziyyat müəllimini yuxarıda göstərilən fəaliyyətə hazırlamaq lazımdır. Müəllimin professional fəaliyyəti üçün onun professional bacarıqlara yiyələnməsi vacibdir. Əsas metodik bacarıqlar aşağıdakılar hesab olunur:

1. riyazi anlayışın tərifini, riyazi təklifləri, qaydaları, alqoritmləri və s. riyazi-məntiqi təhlil etmək;
2. dərsliyin məntiqi tam olan hər bir hissəsini məntiqi-didaktik təhlil etmək;
3. riyazi təklifin isbatını tapmagı, məsələ və misalların həllini tapmagı təşkil etmək;
4. anlayışı öyrənmək, riyazi təklifləri isbat etmək, alqoritm və qaydaları öyrənmək üçün çalışmaları seçmək;
5. sadə əyani vasitələri və tədris vasitələrini hazırlamağı bacarmaq;

6. sorgu materialları, cədvəllər və s. oxşar materiallarla işləməyi bacarmaq və bunu şagirdlərə öyrətmək;
7. konkret sualı (teoremi, məsələni və s.) öyrənmək üçün ədəbiyyat seçməyi bacarmaq;
8. konkret biliyin mənimsənilməsini müəyyən etmək üçün suallar, yoxlama işləri, fərdi işlər sistemi tərtib etmək;
9. yoxlama işlərini qiymətdəndirmək və onun nəticələrini təhlil etmək;
10. yazı lövhəsindən səmərəli istifadə etmək, məsələlərin həllini, teoremlərin isbatını və s. qoyulan standartlara uygun tərtib etmək;
11. konkret tədris materialının öyrənilməsi məqsədini təyin etmək;
12. konkret tədris materialının öyrənilməsi metodunu müəyyən etmək və s.
13. Dərs vəsaiti riyaziyyatçı-riyaziyyat müəllimi ixtisası üzrə ali təhsil alan tələbələr və gənc müəllimlər üçün nəzərdə tutulmuşdur. Dərs vəsaitində «Riyaziyyatın tədrisi metodikası» predmetinin ümumi və mühüm bölmələri şərh olunmuşdur.

ÜMUMİ METODİKA

FƏSİL I. RİYAZİYYATIN TƏDRİSİ METODİKASININ PREDMETİ

§1. «Riyaziyyatın tədrisi üsulları» fənninin məqsədi, məzmunu və vəzifələri

Riyaziyyatın tədrisi metodikasının predmeti riyaziyyatın təlimi prosesidir. Başqa sözlə, riyaziyyatın tədrisi metodikası bütün tədris mərhələlərində riyaziyyatın təlimi qanunauyğunluqlarını öyrənir. Riyaziyyatın tədrisi metodikası təlim prosesi ilə bağlı aşağıdakılara aydınlıq gətirir:

1. Nə üçün riyaziyyatı öyrənmək lazımdır (riyaziyyat təliminin məqsədi)?
2. Riyaziyyatdan nəyi öyrənmək lazımdır (riyaziyyat təliminin məzmunu)?
3. Riyaziyyatı necə öyrənmək lazımdır (riyaziyyat təliminin üsulları)?

Riyaziyyatın tədrisi metodikasına aid ilk tədqiqat işi 1803-cü ildə nəşr olunmuşdur. «Ədəd haqqında əyani təlim» adlı bu tədqiqat işinin müəllifi isveçrəli riyaziyyatçı-pedaqoq Y.Pestalotsi idi. Deməli, riyaziyyatın tədrisi metodikası müstəqil elm sahəsi kimi XIX əsrin əvvəllərində yaranmışdır. Riyaziyyatın tədrisi metodikası riyaziyyat, pedaqogika, psixologiya, fəlsəfə və kibernetika elmləri ilə sıx əlaqədə inikaşaf etmişdir.

Riyaziyyatın tədrisi metodikasının riyaziyyat elmi ilə sıx əlaqəsi təbiidir, çünki riyazi bölmələr məktəb riyaziyyat kursuna xüsusi qaydada işlənildikdən sonra daxil edilir. Bunun üçün riyazi anlayış, fakt və metodların təbii formalaşması prosesini bilmək zəruridir. Riyaziyyat elminin inkişafı tarixini şərti olaraq aşağıdakı dövrlərə bölürlər:

1) riyaziyyatın yaranması dövrü;
2) sabit kəmiyyətlər riyaziyyatı dövrü;
3) dəyişən kəmiyyətlər riyaziyyatı dövrü;
4) dəyişən münasibətlər riyaziyyatı dövrü.

Riyaziyyatın yaranması dövründə ədəd və fiqur anlayışları formalaşmışdır. Hesab və həndəsə bu dövrdə yaranmışdır. Bu elmlərin məzmununu praktik məsələlərin empirik həlli qaydaları təşkil edirdi. Bu dövr bizim eradan əvvəl VI əsrə qədər davam etmişdir.

Sabit kəmiyyətlər riyaziyyatı dövrü bizim eradan əvvəl VI-V əsrlərdən başlanır. Bu dövrdə riyaziyyat müstəqil elm kimi formalaşır, onun tədqiqat obyekti (ədəd və fiqur) və tədqiqat metodları müəyyənləşir. Xüsusi simvolika və cəbr bu dövrdə yaranmışdır.

Dəyişən kəmiyyətlər riyaziyyatı dövrü XVII əsrdən başlanmış, XIX əsrin birinci yarısına qədər davam etmişdir. Riyaziyyatda funksiya, kəsilməzlik və hərəkət ideyaları bu dövrdə yaranır və möhkəmlənir. Klassik riyazi analiz, analitik həndəsə məhz bu dövrdə yaranmışdır.

Dəyişən münasibətlər riyaziyyatı dövrü (müasir riyaziyyat dövrü) XIX əsrin ortasından başlanır. Bu dövr mücərrəd riyazi qurmalarla xarakterizə olunur. Riyazi struktura anlayışı bu dövrdə yaranmışdır.

Riyaziyyatın tədrisi metodikasının pedaqogika elmi ilə də sıx əlaqəsi vardır. Məlumdur ki, pedaqogika təlimin ümumi qanunauyğunluqlarını öyrənir. Riyaziyyatın tədrisi metodikası bu ümumi qanunlardan geniş istifadə edir.

Riyaziyyatın təlimi prosesi yalnız şagirdlərin psixoloji xüsusiyyətlərini nəzərə almaqla təşkil oluna bilər. Ona görə də riyaziyyatın tədrisi metodikasının psixologiya elminin nəticələrindən istifadə etməsi vacibdir.

Təlim prosesini idarə etmək üçün kibernetika elminin nəticələrindən də istifadə olunmalıdır. Məlumdur ki, kibernetika müxtəlif sistemlərin idarə olunmasının ümumi qanunauyğunluqlarını öyrənir.

Riyaziyyatın tədrisi metodikasının idrak prosesinin qanunauyğunluqlarını öyrənən fəlsəfə elminin nəticələrindən də istifadə etməsi vacibdir.

Pedaqoji-riyazi tədqiqatların təhlili göstərir ki, riyaziyyatın tədrisi metodikası öz tədqiqatlarında aşağıdakı metodlardan istifadə edir:

1) riyaziyyatın inkişafı tarixinin öyrənilməsi və istifadə olunması;
2) riyaziyyat təliminin müasir təcrübəsinin öyrənilməsi və istifadə olunması;

3) riyazi metodların və riyazi dilin didaktik işlənilməsi və onların məktəb riyaziyyat kursuna köçürülməsi;
4) pedaqoji eksperimentin aparılması.

Riyaziyyatın inkişafı tarixi riyazi metodların və riyazi dilin inkişafı yolları haqqında çox mühüm informasiya verir. Bu informasiya isə öz növbəsində riyazi metodların və riyazi dilin məktəb riyaziyyat kursuna daxil edilməsinin mümkün yollarını tapmağa imkan yaradır.

Riyaziyyat təlimi təcrübəsinin öyrənilməsi, ümumiləşdirilməsi və onun müsbət elementlərindən istifadə olunması riyaziyyatın tədrisi metodikasının inkişafında mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Riyazi metodların, riyazi dilin didaktik işlənilməsi və məktəb riyaziyyat kursuna daxil edilməsi də riyaziyyatın tədrisi metodikasının inkişafına xidmət edir.

Riyaziyyatın tədrisi metodikası öz tədqiqatlarında pedaqoji eksperimentdən də geniş istifadə edir. Məlumdur ki, pedaqoji eksperimenti düzgün aparmaq digər elm sahələrində eksperiment aparmaqdan qat-qat çətindir. Pedaqoji eksperimentlərin qoyulmasının və aparılmasının çətinliyi, hər şeydən əvvəl, şagirdin idrak fəaliyyətinin zəif öyrənilməsindən irəli gəlir.

Cəmiyyətin həyatını yaşlı nəslin topladığı bilik və bacarıqları gənc nəslə verməsi prosesi olmadan təsəvvür etmək olmaz.

Konkret fənnin öyrənilməsinin məqsədləri cəmiyyətin tələbatı ilə müəyyən edilir. Ona görə də konkret fənnin öyrənilməsinin məqsədləri dəyişməz qalmır. Konkret fənnin məzmunu onun öyrənilməsinin məqsədləri ilə müəyyən edildiyindən, konkret fənnin məzmunu da dəyişir. Riyaziyyat təliminin məzmunun dəyişməsi aşağıdakı faktorlarla bağlıdır:

1) təlimin məqsədlərinin genişlənməsi, orta məktəb məzunlarının riyazi hazırlığına olan tələblərin çoxalması;
2) riyaziyyat elminin daim inkişaf etməsi, bəzi bölmələrin elmi-praktik əhəmiyyətinin azalması, yeni riyazi bölmələrin məktəb riyaziyyat kursuna əlavə edilməsi zərurətinin yaranması;
3) gənc nəslin ümumi hazırlığına cəmiyyətin tələblərinin artmasına uyğun olaraq bəzi riyazi bölmələrin daha erkən yaşlarda öyrənilməsinin mümkünlüyü;
4) pedaqoji elmlərin inkişafı, riyaziyyat təlimində əldə olunan elmi-metodik biliklərin tətbiqi, informasiya texnoloqiyalarının təlim prosesində tətbiqi.

Son illərdə məktəb riyaziyyat kursunun məzmunu ciddi dəyişmişdir: törəmə və inteqral, həndəsi çevirmələr, birləşmələr nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsi, kompleks ədədlər, çoxhədlilər cəbri və s. bölmələr məktəb riyaziyyat kursunun məzmununa daxil edilmişdir.

Riyaziyyat təliminin məqsədlərini aşağıdakı qruplara ayırmaq olar:

1) riyaziyyat təliminin ümumtəhsil məqsədləri;
2) riyaziyyat təliminin tərbiyə məqsədləri;
3) riyaziyyat təliminin praktik məqsədləri.

Orta məktəbdə riyaziyyat təliminin ümumtəhsil məqsədləri aşağıdakılar hesab olunur:

1) şagirdlərə riyaziyyatdan bilik, bacarıq və vərdişlərin müəyyən sistemini vermək;
2) şagirdlərin real aləmin riyazi metodlarla dərk olunmasına yiyələnməsinə kömək göstərmək;
3) şagirdləri riyaziyyatdan yazılı və şifahi nitqə alışdırmaq;
4) şagirdlərə fəal idrak fəaliyyəti üçün zəruri olan minimum riyazi informasiyaya yiyələnməkdə kömək göstərmək.

Orta məktəbdə riyaziyyat təliminin tərbiyə məqsədləri aşağıdakılar hesab olunur:

1) şagirdlərdə mütərəqqi dünya görüşü tərbiyə etmək;
2) şagirdlərdə riyaziyyatı öyrənməyə dayanıqlı maraq tərbiyə etmək;
3) şagirdləri mənəvi-estetik ruhda tərbiyə etmək;
4) şagirdlərin riyazi təfəkkürünü inkişaf etdirmək.

Orta məktəbdə riyaziyyat təliminin praktik məqsədləri aşağıdakılar hesab olunur:

1) şagirdlərdə qazanılmış riyazi bilikləri sadə praktik məsələlərin həllində tətbiq edə bilmək bacarıqları formalaşdırmaq;
2) şagirdlərdə riyazi cihaz və alətlərdən istifadə etmək bacarıqları formalaşdırmaq;
3) şagirdlərdə elmi və tədris xarakterli informasiyanı sərbəst əldə etmək bacarıqları formalaşdırmaq.

§ 2. «Riyazi təhsilin islahatları uğrunda» beynəlxalq hərəkat

Ənənəvi riyazi təhsil sistemi XIX əsrdə yaranmış və təqribən 100 ildə formalaşmışdır. Təhsil ibtidai və tam orta təhsil pilləsinə bölünmüşdür. İbtidai təhsil 3-5 ilə, tam orta təhsil isə 11-13 ilə başa çatırdı. Əvvəlcə, ibtidai riyazi təhsilin məzmununu elementar hesabi biliklər (saymaq və hesablamaq) təşkil etmişdir. Sonradan ibtidai riyazi təhsilə həndəsə elementləri də daxil edilmişdir. Orta məktəbin riyaziyyat kursunun məzmununu bir-birindən təcrid edilmiş riyazi bölmələr: hesab, cəbr, həndəsə və triqonometriya fənləri təşkil edirdi.

İbtidai məktəbdə riyaziyyatın təlimi üsulu kimi hesablama qaydalarının və bəzi mətnli hesab məsələlərinin həlli qaydalarının empirik öyrədilməsi tətbiq edilirdi.

Orta məktəbdə riyaziyyatın təlimi üsulu kimi nəzəri materialın formal daxil edilməsi, anlayışların tərifinin və teoremlərin isbatının doqmatik verilməsi və məsələlərin həlli qaydalarının formal öyrədilməsi tətbiq edilirdi. İbtidai təhsilin məzmunu ilə orta təhsilin məzmunu arasında böyük uyğunsuzluq yaranmışdı. İbtidai təhsillə orta təhsil arasında varislilik yox idi. Beləliklə, ənənəvi riyaziyyat təliminin aşağıdakı nöqsanları çox qabarıq şəkildə özünü göstərirdi:

1) ənənəvi riyaziyyat təlimi məzmunca müasir riyaziyyat elmindən təcrid olunmuşdu;
2) ənənəvi riyaziyyat təliminin məzmunu şagirdin həyat təcrübəsindən təcrid olunmuşdu;

3) ənənəvi riyaziyyat təlimində tətbiq olunan təlim üsulları çox primitiv idi.

Ənənəvi riyaziyyat təlimində şagirdin yaddaşı çox yüklənirdi, onun riyazi təfəkkürünün inkişafına diqqət yetirilmirdi. Ənənəvi riyaziyyat təliminin göstərilən nöqsanları XIX əsrin mütərəqqi pedaqoji ictimaiyyətini riyazi təhsilin islahatları uğrunda beynəlxalq hərəkat yaratmağa məcbur etdi. O dövrün mütərəqqi fikirli riyaziyyatçı-pedaqoqlarının təmsil olunduğu bu hərəkat 1899-cu ildə «Riyazi təhsil» adlı beynəlxalq jurnal nəşr etməyə başladı. Bu jurnalın səhifələrində riyazi təhsilin mövcud problemləri müzakirə olunmağa başladı. 1908-i ildə Romada IV Beynəlxalq riyaziyyat konfransı çağırıldı. Bu konfransda riyazi təhsilin islahatı üzrə beynəlxalq komissiya yaradıldı. Bu komissiyanın sədri görkəmli riyaziyyatçı pedaqoq F.Kleyn seçildi. Komisiyanın rəyi əsasında riyazi təhsilin islahatının aşağıdakı əsas istiqamətləri müəyyən edildi:

ibtidai təhsil üzrə:

1) ibtidai məktəbin hesab kursunda həndəsənin rolunu artırmaq;
2) tədris məsələlərinin məzmununu şagirdin həyat təcrübəsinə uyğunlaşdırmaq;
3) hesabın tədrisində əyaniliyin rolunu artırmaq;

tam orta təhsil üzrə:

1) bir-birindən təcrid olunmuş 4 riyazi fənn (hesab, cəbr, həndəsə və triqonometriya) arasında sıx əlaqə yaratmaq;
2) məktəb riyaziyyat kursuna ali riyaziyyat elementlərini daxil etmək;

3) mühüm riyazi ideyaların məktəb riyaziyyat kursunda rolunu gücləndirilmək;
4) tədris məsələlərinin həm məzmununu, həm də həlli metodlarını təkmilləşdirmək.

Məktəb riyaziyyat kursuna aşağıdakı yeni bölmələrin daxil edilməsi təklif olundu:

1) elementar çoxluqlar nəzəriyyəsi;
2) riyazi məntiqə giriş;
3) müasir cəbr elementləri (qrup, halqa, meydan, vektorlar);
4) ehtimal və riyazi statistika elementləri.

Qeyd etmək lazımdır ki, riyazi təhsilin islahatı uğrunda beynəlxalq hərəkatın yaranmasına təkcə ənənəvi riyaziyyat təliminin göstərilən nöqsanları təkan verməmişdir. Dəqiq elmlərin sürətli inkişafı riyaziyyatda yeni bölmələrin yaranmasına səbəb olmuşdur. Bunun nəticəsində riyazi bölmələr arasında süni səddlər yaranmışdı. Riyaziyyatın bölünməz, tam bir elm olduğunu «Nikola Burbakı» təxəllüslü fransız riyaziyyatçıları kollektivinin fundamental tədqiqatları sübut etdi.

XX əsrin ikinci yarısında aparılan pedaqoji-psixoloji tədqiqatların nəticəsi göstərdi ki, kiçik yaşlı məktəblilərin riyazi abstraksiyaları mənimsəmə imkanlarından az istifadə olunur. Bununla da bəzi mühüm riyazi anlayışları təlimin erkən mərhələlərində aşkar şəkildə daxil etmək imkanı yarandı.

§3. Məktəb riyaziyyat kursunun məzmunu

Riyaziyyat təliminin məqsədləri onun məzmununu müəyyən edir. Orta məktəbdə riyaziyyat təliminin məzmunu aşağıdakı mühüm tələbləri ödəməlidir:

1) ümumtəhsil əhəmiyyətli olmalı və mütərəqqi dünyagörüşü formalaşdırmalıdır;
2) riyaziyyatın texnikada və istehsalatda tətbiqinə imkan yaratmalıdır;
3) orta təhsili başa vurmağı və ali təhsil almağı təmin etməlidir;
4) peşə aldıqda riyazi bilikləri tətbiq edə bilmək imkanı yaratmalıdır.

Orta məktəb riyaziyyat kursunun nüvəsini aşağıdakı bölmələr təşkil edir:

1) ədədi sistemlər;
2) kəmiyyətlər;
3) tənliklər və bərabərsizliklər;
4) riyazi ifadələrin eynilik çevirmələri;
5) koordinatlar və vektorlar;
6) funksiyalar;
7) həndəsi fiqurlar və onların xassələri;
8) cəbr və analizin başlanğıcı.

§4. Riyaziyyat təlimində tərbiyə

Təlim prosesi, o cümlədən riyaziyyatın təlimi prosesi hər bir şagirdin şəxsiyyət kimi formalaşmasına fəal təsir imkanına malikdir. Ona görə də şagirdlərin tərbiyəsi prosesinin idarə olunması onların tədris fəaliyyətinin, həm də fərdi və ictimai münasibətlərinin idarə olunmasıdır.

Riyaziyyat təlimi gənc nəslin düzgün tərbiyəsi probleminin ümumi məsələlərinin həlli üçün böyük əhəmiyyət kəsb edir. Riyaziyyat təlimində tərbiyə işinin müvəffəqiyyətini təmin edən aşağıdakı mühüm müddəaları nəzərə almaq lazımdır:

1) şagirdin tərbiyəsi aramsız, planauyğun surətdə aparılmalıdır. Tərbiyə yönümlü epizodik tədbirin təşkilindən ciddi nəticələr gözləmək olmaz;
2) təlim prosesində tərbiyə işi elə təşkil olmalıdır ki, şagirdlər onu şəxsi əqidə və davranış norması kimi qəbul etsinlər. Nəzərə almaq lazımdır ki, bu işdə müəllimin şəxsi nümunəsi, onun dünyagörüşü və mənəvi keyfiyyətləri mühüm əhəmiyyət kəsb edir;
3) təlim prosesində tərbiyə tədricən özünütərbiyə ilə əvəz olunmalıdır.

Didaktikanın tələblərinə uyğun olaraq riyaziyyat təlimi şagirdlərin ümumi orta təhsil almasına xidmət etməklə, həm də onları tərbiyə etməlidir. Bu o deməkdir ki, riyaziyyat təlimi şagirdlərin bilik, bacarıq və vərdişlər sisteminə yiyələnməsini təmin etməklə, həm də ümumi mədəniyyət formalaşdırmalıdır. İlk növbədə çalışmaq lazımdır ki, şagirdlər cəmiyyətin inkişafında riyaziyyatın rolunu qiymətləndirə bilsin, istehsalatda və texnikada riyaziyyatın fundamental əhəmiyyətə malik olduğunu anlaya bilsin. Ona görə də təlim prosesində müəllim riyaziyyatın metodoloji məsələlərinə xüsusi yer ayırmalı, şagirdlərdə elmi dünya görüşünün formalaşması üçün bütün imkanlardan istifadə etməlidir. Təlim prosesində şagirdlərə izah etmək lazımdır ki, riyazi abstraksiyalar (ədəd, fiqur, funksiya və s.) real aləmin obyekt və hadisələrinin elmi ümumiləşdirilməsinin nəticəsidir.

Riyaziyyat təliminin tarixi göstərir ki, riyaziyyat təlimi düzgün təşkil olunarsa o şagirdlərdə düzgünlük, doğruculuq, dözümlülük, vətənpərvərlik və s. mənəvi keyfiyyətlərin formalaşmasında əvəzsiz xidmət göstərə bilər. Bu məqsədlə müəllim təlim prosesində riyaziyyatın tarixindən uyğun materiallara müraciət etməlidir (məsələn, Azərbaycan alimlərinin elmi nəticələrinin dünya elminə verdiyi töhvələrə həsr olunmuş söhbətlər aparılmalıdır).

Riyaziyyat təliminin müvəffəqiyyəti şagirdlərdə riyaziyyatı öyrənməyə dayanıqlı marağın tərbiyəsindən əhəmiyyətli dərəcədə asılıdır. Əgər müəllimin izahı məktəbliyə aydındırsa, onun həll etdiyi məsələ həm məzmununa görə, həm də həll üsuluna görə maraqlıdırsa, onda o məktəblinin özünün düşünməsi, ümumiləşdirməsi və nəticə çıxarması üçün real imkanlar yaratmış olar. Ona görə də təlim prosesində didaktikanın aşağıdakı əsas müddəalarına əməl etmək çox vacibdir. Təlimdə

- sadədən mürəkkəbə doğru,
- konkretdən ümumiyə doğru,
- konkret praktik nəticədən teorem və qaydalara doğru getmək lazımdır.

Şagirdin riyaziyyatı öyrənməyə marağının tərbiyə olunmasında onun yaradıcılıq və qələbə sevinci yaşamasının da əhəmiyyəti böyükdür. Ona görə də çalışmaq lazımdır ki, mümkün olan yerdə hər bir şagird bu hissi keçirsin. Bunlar təkrar olduqca şagirdin riyaziyyatı öyrənməyə marağı artar və bu maraq dərin və uzunmüddətli olar.

Riyaziyyat təlimində şagirdlərin estetik tərbiyyəsinə də diqqət yetirmək lazımdır. Estetik tərbiyə dedikdə bütün incəsənət sahələrinə aid olan, bizi əhatə edən aləmdəki gözəlliklərin bütün formalarına aid bilik və bacarıqlar sisteminin formalaşması başa düşülür. Riyaziyyat təbiətinə görə şagirdlərdə sözün geniş mənasında gözəl hislər tərbiyə etmək üçün geniş imkanlara malikdir: simmetrik fiqurların xassələri, düzgün çoxbucaqlıların xassələri, fiqurların ölçülərinin nisbəti və s. şagirdlərdə estetik hislərin oyanmasına imkan yaradır. Müəllimdən isə bütün bunlara şagirdlərin diqqətini cəlb etmək tələb olunur. Məsələn, «düzbucaqlının qonşu tərəflərinin nisbəti neçə olduqda o gözəl görünər?» sualı şagirdlərin böyük marağına səbəb olar. Bu sualın cavabı lap qədim əsrlərdə tapılıb: əgər düzbucaqlının böyük tərəfinin uzunluğu yarımperimetrlə digər tərəfin uzunluğunun həndəsi ortasına bərabər olarsa, o gözəl görünər. Məsələn, tərəfləri 34 və 21 olan düzbucaqlı bu tələbi ödəyir:

$$\frac{55}{34} \approx 1{,}618 \text{ və } \frac{34}{21} \approx 1{,}619 .$$

Hər hansı məsələnin orijinal, qeyri-standart həlli də şagirdlərin estetik tərbiyəsində əhəmiyyətli rol oynaya bilər.

FƏSİL II. RİYAZİYYATIN TƏLİMİ PROSESİNDƏ TƏFƏKKÜR (İDRAK) FORMALARI

§1. Riyaziy anlayış və onun tərifi

Riyazi biliklərin dərindən mənimsənilməsi şagirdin riyazi təfəkkürünün məqsədyönlü inkişafına nail olmadan mümkün deyil. Fəlsəfi nöqteyi-nəzərdən təfəkkür obyektiv gerçəkliyin insan şüurunda fəal inkişafıdır. Formal məntiqə görə, təfəkkür üç formada təzahür edir:

1) anlayış;

2) mülahizə;

3) əqli nəticə.

Təfəkkürün bu formalarını fərqləndirmək üçün aşağıdakı misallara baxaq:

I. a) üçbucağın medianı onun hər hansı tərəfinin orta nöqtəsini bu tərəfin qarşısındakı təpə nöqtəsi ilə birləşdirən parçadır;

b) trapesiyanın orta xətti onun yan tərəflərinin orta nöqtələrini birləşdirən parçadır.

Bu təkliflərin hər ikisinin bir ortaq əlaməti var. Onların hər biri müəyyən şərtləşməni ifadə edir və hər ikisi anlayışdır.

II. a) müstəvinin iki müxtəlif nöqtəsindən yalnız bir düz xətt keçirmək olar;

b) istənilən üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 180^0-yə bərabərdir.

Bunların hər ikisi əsaslandırılmağa ehtiyacı olan hökmü ifadə edir və mülahizə adlanır.

III. a) əgər $a = b$ və $b = c$ olarsa, onda $a = c$;

b) əgər $a \in A$ və $A \subset B$ olarsa, onda $a \in B$.

Bu təkliflərin hər ikisində müəyyən şərtlərə əsaslanaraq müəyyən nəticə çıxarılır. Onların hər ikisi əqli nəticə adlanır.

Obyektləri bir-birindən müxtəlif xüsusiyyətlərinə, xassələrinə və əlamətlərinə görə fərqləndirirlər. Tədqiq olunan obyektlərin xassələrini 1) fərdi və 2)ümumi xassələrə ayırmaq olar.

Obyektlərin ümumi xassələri fərqləndirici və fərqləndirici olmayan ola bilər. Obyektin ümumi xassəsi mühüm xassə olarsa, onda o fərqləndirici xassə adlanır.

Anlayış öyrənilən obyektin mühüm (fərqləndirici) xassələrinin inikas olunduğu təfəkkür formasıdır. Əgər anlayış real aləmdə mövcud olan obyektlərin inikasından ibarətdirsə, onda anlayış düzgün anlayış adlanır. Hər bir anlayışı məzmun və həcminə görə xarakterizə etmək olar.

Anlayışın bütün mühüm (fərqləndirici) xassələrinin küllisi onun məzmunu adlanır.

Anlayışda təmsil olunan obyektlər küllisi onun həcmi adlanır.

Məsələn «paraleloqram» anlayışının məzmununu aşağıdakı mühüm xassələr təşkil edir:

1) qarşı tərəflərin bərabərliyi;
2) qarşı bucaqların bərabərliyi;
3) diaqonalların kəsişmə nöqtəsində hər bir diaqonalın yarıya bölünməsi və s.

«Paraleloqram» anlayışının həcmini isə aşağıdakı fiqurlar təşkil edir: 1) paraleloqramlar; 2) romblar; 3) düzbucaqlılar; 4) kvadratlar.

Anlayışın həcmi onun məzmununu birqiymətli müəyyən edir və tərsinə. Anlayışın həcmi və məzmunu arasında bir növ «tərs» əlaqə vardır: əgər anlayışın məzmunu artarsa,onun həcmi azalar və tərsinə, anlayışın məzmunu azalarsa, onun həcmi artar.

Məsələn, ümumiləşdirmə zamanı anlayışın həcmi genişlənir, məzmunu daralır. Lakin xüsusiləşdirmə zamanı anlayışın həcmi daralır, məzmunu isə genişlənir. Anlayışın məzmunu və həcmi arasındakı göstərilən asılılıq o zaman doğru olur ki, məzmunun dəyişməsi prosesi zamanı bir anlayışın həcmi digər anlayışın həcminin altçoxluğu olsun.

Əgər bir anlayışın həcmi (h_1) o biri anlayışın həcminin (h_2) altçoxluğu olarsa, onda ikinci anlayış birinci üçün cins anlayış, birinci isə öz növbəsində ikinci üçün növ anlayış adlanır.

Məsələn, romb paraleloqram anlayışına nəzərən növ, öz növbəsində paralelrqram romb anlayışı üçün cinsdir.

Anlayışın formalaşmasında onun nitq vasitəsilə ifadə olunması zəruridir.

Elm və texnikanın müəyyən anlayışını birqiymətli işarə edən söz elmi termin adlanır. Məsələn, «romb» sözü elmi termindir.

Anlayışın məzmununu müəyyən etmək üçün onun mühüm xassələrini göstərmək lazımdır. Bunu anlayışın tərifində göstərirlər. Anlayışın hər biri ayrılıqda zəruri, hamısı birlikdə kafi olan bütün əlamətlərinin (xassələrinin) əlaqəli cümlələr şəklində təsviri (ifadəsi) anlayışın tərifi adlanır. Anlayışın tərifində artıq söz olmamalıdır.

Şagirdlərə izah olunmalıdır ki, anlayışın tərifi isbat olunmur. Anlayışlara tərif müxtəlif üsullarla verilə bilər.

1. Yaxın cins və növ fərqinin göstərilməsi ilə anlayışa tərif aşağıdakı sxem üzrə verilir:

$$A_1 = \{x | x \in A \wedge P(x)\} \wedge A_1 \neq \varnothing,$$

$$A_2 = \{x | x \in A \wedge \overline{P(x)}\} \wedge A_2 \neq \varnothing,$$

$A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cup A_2 = A$ olarsa,

$A_1(A_2)$ anlayışı A anlayışına nəzərən növ, A anlayışı isə $A_1(A_2)$ anlayışına nəzərən cins anlayış adlanır (burada P müəyyən xassədir).

Yaxın cins və növ fərqinin göstərilməsi ilə verilən tərifə misal göstərək: «Diaqonalları bərabər olan paraleloqrama düzbucaqlı deyilir». Burada yaxın cins – paraleloqram, növ fərqi – diaqonalların bərabər olması, termin isə düzbucaqlıdır. Yuxarıdakı sxemə uyğun yazsaq

A= {paraleloqramlar çoxluğu},

A_1= {diaqonalları bərabər olan paraleloqramlar çoxluğu},

P= «Diaqonalların bərabər olması».

Yaxın cins və növ fərqinin göstərilməsi ilə verilən təriflər aşağıdakı konkret formalarda ola bilər:

1) obyektlərin xarakterik əlamətlərini göstərməklə onlara verilən təriflər;
2) inkar edən təriflər;
3) konstruktiv və rekursiv təriflər.

Bu formaların hər birində məntiqi bağlayıcılardan (və, və ya) istifadə oluna bilər. Ona görə də orta məktəb riyaziyyat kursunda konyuktiv və dizyuntiv təriflər də fərqləndirilir.

Obyektlərə onların xarakterik əlamətlərini göstərməklə verilən tərifə misal göstərək: «Qarşı tərəfləri cüt-cüt paralel olan düz xətlər üzərində yerləşən dördbucaqlı paraleloqram adlanır». Bu tərifdə:

cins – dördbucaqlı;

növ fərqləri – bir cüt qarşı tərəfin paralel olması və o biri cüt qarşı tərəfin paralel olması;

termin – paraleloqramdır.

Digər tərəfdən, bu tərifdə növ fərqləri məntiqi «və» bağlayıcısından istifadə olunmaqla birləşdirildiyindən o həm də konyuktiv tərifdir.

Başqa bir misal göstərək: «Məxrəci sürətindən kiçik olan və ya məxrəci sürətinə bərabər olan kəsr düzgün olmayan kəsr adlanır». Bu tərifdə:

cins – adi kəsr;

növ fərqləri – məxrəci sürətdən kiçikdir və ya məxrəc sürətə bərabərdir;

termin – düzgün olmayan kəsr.

Bu tərifdə növ fərqləri məntiqi «və ya» bağlayıcısı ilə birləşdiyindən o dizyuntiv tərifdir.

İnkar edən tərif təsvir etdiyi obyektlərin xassələrini yox, bu obyektlərdə olmayan xassələri təsvir edir. Məsələn, «Bir müstəvidə yerləşməyən və ortaq nöqtəsi olmayan düz xətlər çarpaz düz xətlər adlanır». Bu tərifdə:

cins – düz xətlər;

növ fərqləri – bir müstəvidə yerləşməmək və ortaq nöqtəyə malik olmamaq;

termin – çarpaz düz xətlər.

Bu tərif həm də konyuktiv tərifdir.

Konstruktiv və rekursiv təriflərdə obyektin xassələri onun konstruksiya olunmasının təsviri ilə göstərilir. Başqa sözlə, növ fərqləri əməllər vasitəsilə verilir. Məsələn, «$y = kx + b$ şəklində göstərilə bilən funksiya xətti funksiya adlanır, burada k və b məlum ədədlər, x isə sərbəst dəyişəndir». Bu tərifdə:

cins – funksiya;

növ fərqləri – $y = kx + b$ şəklində göstərilə bilən və x sərbəst dəyişən və k və b məlum ədədlər;

termin – xətti funksiyadır.

Obyektin qurulması (konstruksiya olunması) üçün tələb olunan əməllər müxtəlif formalarda verilə bilər. Məsələn, rekursiv tərifdə müəyyən bazis obyekti və bu xassəli yeni obyektləri qurmağa imkan verən qayda verilir. Məsələn, «ədədi ardıcıllıqda ikincidən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki hədlə bu ədədi ardıcıllıq üçün sabit olan bir ədədin hasilinə bərabər olarsa, onda bu ədədi ardıcıllıq həndəsi silsilə adlanır: $a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad n \geq 2$.

Riyazi anlayışları öyrənmək üçün metodikada iki metod fərqləndirilir: 1) konkret-induktiv, 2) mücərrəd-deduktiv.

Riyazi anlayış konkret-induktiv metodla daxil edilərkən, əvvəlcə anlayışa aparan misallar göstərilir, sonra mühüm əlamətlər seçilir və nəhayət anlayış daxil edilir.

Riyazi anlayış mücərrəd-deduktiv metodla daxil edildikdə əvvəlcə anlayışın tərifi verilir. Sonra xüsusi (və ya məxsusi) hallar araşdırılır; Növbəti mərhələdə daxil edilən anlayışa konkret misallar göstərilir. Sonuncu mərhələdə daxil edilən anlayışın sadə hallara tətbiqi araşdırılır. Riyazi anlayışların öyrənilməsi zamanı birinci üsuldan aşağı siniflərdə, ikinci üsuldan isə yuxarı siniflərdə istifadə olunmalıdır fikri səhvdir. Qabaqçıl təcrübə göstərir ki, nisbətən sadə anlayışları mücərrəd-deduktiv üsulla öyrənmək səmərəlidir. Nisbətən mürəkkəb riyazi anlayışları konkret induktiv üsulla öyrənmək əlverişli hesab olunur.

Anlayışın öyrənilməsi prosesini aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

1) anlayışı daxil etməyə hazırlıq;
2) anlayışın məzmunun araşdırılması və anlayışın həcmi haq qında təsəvvür yaratmaq;
3) sadə hallarda anlayışın tətbiqləri ilə tanışlıq;
4) anlayışın digər anlayışların sisteminə əlavə edilməsi.

Qeyd etmək lazımdır ki, hər bir mərhələdə müvafiq çalışmalar sisteminin seçilməsi həlledici rol oynayır.

Riyazi anlayışın mənimsənilməsi şagirdin bu anlayışın məzmunu və həcmi haqqında aydın təsəvvürü olması ilə yanaşı onun bu anlayışı öz riyazi fəaliyyətində tətbiq edə bilməsini də nəzərdə tutur. Teoremlərin isbatı və məsələlərin həlli zamanı şagird tanış olduğu anlayışı standart olmayan situasiyalarda da aşkar etməyi bacarmalıdır.

§2. Riyazi təkliflərin öyrənilməsi metodları

Təfəkkürdə anlayışlar bir-birilə müəyyən əlaqədə olur. Anlayışların əlaqələri təkliflər vasitəsi ilə ifadə olunur. Riyazi təkliflərin aşağıdakı növləri fərqləndirilir: aksiomlar, teoremlər və qaydalar (alqoritmlər). Aksiom isbatsız qəbul edilən riyazi təklifdir. Məsələn, «Müstəvinin iki müxtəlif nöqtəsindən yeganə düz xətt keçirmək olar».

Riyazi nəzəriyyə qurularkən ilk anlayışlar, ilk münasibətlər, aksiomlar sistemi və nəticə çıxarmaq qaydaları qəbul edilir.

Aksiomlar sistemi ziddiyyətsiz, asılı olmayan və tam olmalıdır.

Əgər verilən aksiomlar sistemindən bu sistemlə qurulan nəzəriyyəyə aid olan eyni bir təklifin həm doğru və həm də yalan olması alınmırsa, onda aksiomlar sistemi ziddiyyətsiz adlanır. Əks halda aksiomlar sistemi ziddiyyətli adlanır.

Əgər aksiomlar sisteminin heç bir aksiomu bu sistemin yerdə qalan aksiomlarından nəticə kimi alınmırsa, onda verilən aksiomlar sistemi asılı olmayan adlanır.

Aksiomlar sisteminin tamlığı dedikdə bu sistemlə ifadə oluna bilən istənilən təklifin doğru və ya yalan olduğunu isbat etməyin mümkün olduğu başa düşülür.

Doğruluğu isbat olunan (əsaslandırılan) riyazi təkliflər teorem adlanır.

Alqoritm (qayda) dedikdə qoyulmuş məqsədə çatmaq və ya qoyulmuş məsələni həll etmək üçün müəyyən ardıcıllıqla yerinə yetirilən əməl və ya əməliyyatlar küllisi başa düşülür.

Məktəb riyaziyyat kursunda alqoritm və qaydalar çoxdur. Məsələn, natural ədədin sadə vuruqlarına ayrılması qaydası; kəsrlərin ən kiçik ortaq məxrəcə gətirilməsi qaydası və s.

Alqoritmlərə qoyulan tələblərin ən mühümləri aşağıdakılardır:

1) alqoritmi yerinə yetirdikdə həmişə konkret nəticə alınmalıdır;
2) alqoritm sadə və aydın olmalıdır;
3) alqoritm sonlu sayda adımlardan (əməl və ya əməliyyatdan) ibarət olmalıdır və s.

Məsələn, $ax = b$ şəklində olan tənliyin həlli alqoritmini yada salaq: 1) əgər $a \neq 0$ isə, onda $x = \frac{b}{a}$; 2) əgər $a = 0$ və $b = 0$ isə, onda istənilən ədəd həldir; 3) əgər $a = 0$ və $b \neq 0$ isə, onda tənliyin həlli yoxdur.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu alqoritm yuxarıdakı tələblərin hər birini ödəyir.

Hər bir teorem əsasən iki hissədən ibarət olur:

1) bu və ya digər riyazi fakta hansı şərtlərlə baxılır (teoremin şərti);
2) bu fakt haqqında nə təsdiq olunur (teoremin hökmü).

Məsələn, belə bir teoremi nəzərdən keçirək: «Əgər dördbucaqlı paraleloqramdırsa, onda onun diaqonalları kəsişərək, yarıya bölünürlər».

Burada teoremin şərti (p): dördbucaqlı-paraleloqramdır; teoremin hökmü (q): diaqonalların kəsişmə nöqtəsi onların hər birini yarıya bölür.

Teoremin şərtini və hökmünü asanlıqla ayırd etmək üçün onu çox vaxt «əgər..., onda...» məntiqi bağlayıcısından istifadə edərək, implakasiya şəklində ifadə edirlər. Ona görə də teoremi ümumi şəkildə, məntiqi dildə belə yazmaq olar: $p \Rightarrow q$.

Teoremin isbat edilməsi onu göstərməkdən ibarətdir ki, əgər şərt ödənirsə, bu halda məntiqi olaraq ondan hökm alınır; yəni p-nin doğruluğunu qəbul edərək, məntiqin müəyyən qaydalarına uyğun olaraq q-nün doğru olduğunu almaq olur.

Verilmiş $p \Rightarrow q$ teoremindən istifadə edərək aşağıdakı teoremləri almaq olar:

a) tərs teorem: $q \Rightarrow p$;

b) əks teorem: $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$;

c) əks teoremin tərs teoremi: $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Əgər yuxarıdakı teoremi düz teorem qəbul etsək, onda bu teoremdən aşağıdakı teoremləri almaq olar:

1) əgər dördbucaqlı - paraleloqramdırsa, onda onun diaqonalları kəsişərək, kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünürlər $(p \Rightarrow q)$;

2) əgər dördbucaqlıda diaqonallar kəsişərək, yarıya bölünürsə, onda bu dördbucaqlı paraleloqramdır $(q \Rightarrow p)$;

3) əgər dördbucaqlı paraleloqram deyildirsə, onda onun diaqonalları kəsişərək, kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünmürlər $(\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;

4) əgər dördbucaqlıda diaqonallar kəsişərək, kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünmürsə, onda belə dördbucaqlı paraleloqram deyil $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, bu misalda alınan bütün dörd teoremin hər biri doğrudur.

Lakin bu həmişə belə olmur.

Belə bir təklifə baxaq: əgər bucaqlar qarşılıqlıdırsa, onda onlar bərabərdirlər $(p \Rightarrow q)$. Verilmiş bu teoremin tərsini, əks teoremini və əks teoremin tərs teoremini tərtib edək:

1) əgər bucaqlar bərabərdirsə, onda onlar qarşılıqlı bucaqlardır

$(q \Rightarrow p)$;

2) əgər bucaqlar qarşılıqlı deyilsə, onda onlar bərabər deyil $(\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;

3) əgər bucaqlar bərabər deyilsə, onda onlar qarşılıqlı deyil $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.

Bu misal göstərir ki:

1) düz teorem doğru olsa da, onun tərsi olan teorem doğru deyil (məsələn, düz bucaqlar bərabərdir, lakin onların qarşılıqlı olmaları vacib deyil);

2) düz teorem doğru olduğu kimi, əks teoremin tərsi olan teorem də doğrudur;

3) verilmiş teoremin tərsi olan teoremin doğru olmadığı kimi, onun əksi olan teorem də doğru deyil.

Burada müəyyən edilmiş xassələr təsadüfi deyil. Bu dörd növ teorem arasında sıx əlaqə vardır:

1) $p \Rightarrow q$ və $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ eyni zamanda doğrudur və ya doğru deyil;

2) $q \Rightarrow p$ və $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ həmçinin eyni zamanda doğrudur və ya doğru deyil.

Teoremlər arasında belə qarşılıqlı əlaqənin olması onların öyrənilməsini asanlaşdırır.

Doğrudan da, riyazi obyektlərin teoremlər şəklində ifadə olunmuş xassələrinə baxdıqda, bütün dörd növ teoremlərin hamısının öyrənilməsi zərurəti yoxdur: cüt-cüt ekvivalent olan teoremlərdən (düz və tərs və ya düz və əks və s.) hər hansı birinin doğru olduğunu və ya doğru olmadığını müəyyənləşdirmək kifayətdir, belə ki, bu iki teoremdən hər birinin doğru olması və ya doğru olmaması qalan iki teoremdən hər birinin doğru olmasını və ya doğru olmamasını müəyyən edəcək. Elə buna görə də istənilən riyaziyyat kursunda biz adətən yalnız düz və tərs teoremlərlə rastlaşırıq, qalan teoremlərlə çox təsadüfi hallarda rastlaşmaq olur.

Aşağıdakı təklifləri nəzərdən keçirək:

1) əgər verilmiş natural ədəd cütdürsə, onda həmin ədəd 6-ya bölünür $(p_1 \Rightarrow q_1)$;
2) əgər verilmiş natural ədəd 6-ya bölünürsə, onda həmin ədəd cütdür $(q_1 \Rightarrow p_1)$;
3) əgər verilmiş natural ədəd cütdürsə, onda həmin ədəd 2-yə bölünür $(p_2 \Rightarrow q_2)$;
4) əgər verilmiş natural ədəd 2-yə bölünürsə, onda həmin ədəd cütdür $(q_2 \Rightarrow p_2)$.

Biz görürük ki, birinci təklif doğru deyil, lakin ikinci, üçüncü və dördüncü təkliflər doğrudur.

Teoremləri ifadə etdikdə tez-tez «kafi» , «zəruri», «kafi və zəruri» terminlərindən istifadə edirlər. Bu terminlərin mənasını aydınlaşdıraq:

1) əgər p-dən məntiqi olaraq q alınırsa (yəni $p \Rightarrow q$ teoremi doğrudursa), onda p şərtinə q hökmü üçün kafi şərt deyilir;
2) əgər q-dən məntiqi olaraq p alınırsa (yəni $q \Rightarrow p$ teoremi doğrudursa), onda p şərtinə q hökmü üçün zəruri şərt deyilir;
3) əgər p-dən məntiqi olaraq q alınırsa və q-dən də məntiqi

olaraq p alınırsa (yəni hər iki teorem: düz və onun tərsi doğrudursa), onda p şərtinə q hökmü üçün kafi və zəruri şərt deyilir.

Yuxarıda baxdığımız misalda p_1 şərti q_1 üçün kafi şərt deyil, çünki p_1-dən məntiqi olaraq q_1 alınmır (yəni p_1-in doğru olmasından q_1-in doğru olması alınmır); p_2 isə q_2 üçün kafi şərtdir, çünki p_2-dən məntiqi olaraq q_2 alınır.

Bununla belə p_1 şərti q_1 üçün zəruri şərtdir, belə ki, q_1-dən məntiqi olaraq p_1 alınır.

p_2 şərti isə q_2 üçün kafi və zəruri şərtdir, belə ki, hər iki teorem eyni zamanda doğrudur: $p_2 \Rightarrow q_2$ və $q_2 \Rightarrow p_2$ (yəni burada $p_2 \Leftrightarrow q_2$ məntiqi ekvivalentliliyi vardır).

Aşağıdakı hallar da mümkündür:

a) p şərti q hökmü üçün kafidir, lakin zəruri deyil;

b) p şərti q hökmü üçün zəruridir, lakin kafi deyil.

Birinci halda p-nin doğruluğundan q-nün doğruluğu alınır, lakin q-nün doğruluğu həm də başqa p_1 şərtindən də alına bilər. Məsələn, ədədin cüt olması üçün, onun yalnız 6-ya bölünməsi deyil, həm də 4-ə bölünməsi kafidir. İkinci halda q-nün doğru olmasından p-nin doğru olduğu alınır, eyni zamanda, əgər p doğru olarsa, onda q hər halda doğru olmaya da bilər. Məsələn, ədədin 6-ya bölünməsi üçün, həmin ədədin cüt olması zəruridir, lakin kafi deyil; məsələn, 4 cüt ədəddir, lakin 4 6-a bölünmür.

«Kafi», «zəruri», «kafi və zəruri» terminlərindən istifadə etdikdə «şərt» sözünün əvəzinə tez-tez «əlamət» sözü işlədilir. «Kafi və zəruri» sözlərinin əvəzinə bəzi hallarda «onda və yalnız onda», «o halda və yalnız o halda», «o və yalnız o», «əgər və yalnız əgər» ifadələri işlədilir. Onu da qeyd etmək faydalıdır ki, bu bağlayıcı ifadələrin ayrıca baxılan hissələri də müəyyən məna daşıyır: məsələn, «yalnız o halda», «yalnız onda» və s. sözləri isə «kafi şərt» sözlərini əvəz edirlər.

Riyazi təkliflərin öyrənilməsində həm yaddaşın yüklənməsi, həm də təfəkkürün yüklənməsi zərərlidir. Bir sıra anlayış, aksiom və teoremin dəqiq öyrənilməsi çox vacibdir. Onların dəqiq mənimsənilməsi zəruri bünövrə təşkil edir. Bütün anlayış və teoremlərin əzbər öyrənilməsini tələb etmək düzgün deyil. Riyazi təklifləri müstəqil sürətdə şagirdin öz sözləri ilə ifadə etməsi daha əhəmiyyətlidir. Şagirdlərin hansı biliklər minimumuna yiyələnməsini müəyyən etmək çox vacib metodik problemdir. Bu qəbildən olan təkliflər dərsliklərdə qalın şriflərlə verilir. Lakin bunları birdəfəlik müəyyən etmək mümkün deyildir. Məsələn, üçbucağın daxili bucağının tənböləninin xassəsi artıq dərslikdə məsələ kimi verilir. Anlayışlar kimi teoremlər və aksiomlar təbii, həvəs yaratmaqla öyrənilməlidir. Teoremin öyrənilməsini aşağdakı mərhələlərə bölmək olar:

1) teoremin öyrənilməsinə hazırlıq;
2) sadə situasiyada teoremin tətbiqi;
3) teoremin bilik, bacarıqlar sisteminə daxil edilməsi.

Ənənəvi riyaziyyat təlimində teoremlərin öyrədilməsi zamanı bölgü adlanan metoddan stifadə olunurdu. Bu zaman teoremin məzmunu ilə tanışlıq və teoremin tətbiqinə aid çalışmaların həlli müxtəlif vaxtlarda aparılır. Teoremlərin öyrənilməsi zamanı kompakt və alqoritmik üsüllardan da istifadə olunur. Kompakt üsülla teoremin öyrənilməsi zamanı teoremin məzmunu ilə tanışlıq və tətbiqi üzrə vərdişlərin formalaşdırılması eyni vaxtda aparılır. Alqoritmik metodla teoremin öyrənilməsi zamanı öyrənmə alqoritmi qurulur, sonra isə qurulmuş alqoritm icra edilir. Sadə teoremləri kompakt metodla öyrənmək əlverişli hesab olunur. Nisbətən çətin təklifləri isə bölgü üsulu ilə öyrənmək olar. Alqoritmik üsulla ən çətin teoremlər öyrənilir.

Təkliflərin öyrəniliəsi zamanı misal və əks misallardan da geniş istifadə olunur. Riyaziyyatda isbat olunmuş təklif elə təklif hesab olunur ki, o ya aksitomların və ya əvvəl isbat olunmuş təkliflərin məntiqi nəticəsi olsun. İsbatın ciddiliyi dedikdə, əsaslandırmada istifadə olunan bütün təkliflərin hamısının aşkar göstərilməsi başa düşülür. Lakin buna nail olmaq çox çətindir. Buna görə də isbatda intuisiya ilə ciddiliyin rasional nisbətini saxlamaq vacibdir.

İsbat üsullarını deduktiv, induktiv, analitik və sintetik isbat üsullarına bölmək olar. Deduktiv isbat zamanı bir neçə ilk təklifdən məntiqi qaydalarla teoremin nəticəsi alınır. İnduktiv isbat aşağdakı sexm üzrə aparılır. Əgər $x_1,x_2,...,x_n$ R xassəsinə malikdirsə və M çoxluğu yalnız $x_1,x_2,...,x_n$ elementlərindən ibarətdirsə, onda hököm edilir ki, M çoxluğunun bütün elementləri R xassəsini ödəyir.

Analitik isbat zamanı teoremin nəticəsi onun şərtinə yaxınlaşmaq məqsədi ilə ekvivalent şəkildə dəyişdirilir.

Sintetik isbat zamanı teoremin nəticəsi şərtə yaxınlaşmaq məqsədi ilə ekvivalent şəkildə dəyişdirilir.

İsbatların axtarılması və araşdırılması zamanı aşağdakı qaydalara əməl etmək lazımdır:

1) teoremin nəticəsinə yaxınlaşmaq üçün onun şərtini çevirmək olar;
2) teoremin şərtinə yaxınlaşmaq üçün onun nəticəsini çevirmək olar;
3) anlayışları onların tərifi ilə əvəz etmək olar;
4) bir anlayışın bir neçə ekvivalent tərifindən isbat üçün ən əlverişli olanını götürmək lazımdır;
5) teoremin şərtindən maksimum istifadə etmək lazımdır;
6) anlayışın tərifi əvəzinə onun bir əlamətini - xassəsini götürmək olar.

Teoremin isbatının öyrənilməsi zamanı aşağıdakılara əməl etmək məsləhət görülür:

1) teoremin isbatından əvvəl zəruri təklifləri təkrar etmək lazımdır;
2) teoremin isbatı zamanı onun şərtini və nəticəsini fərqləndirmək lazımdır;
3) isbat zamanı əqli nəticələrin düzgünlüyünə xüsusi diqqət yetirmək lazımdır;
4) isbatın məntiqi quruluşunu aşkar şəkildə göstəmək lazımdır.

İsbatların səmərəliyini artırmaq üçün aşağıdakılara əməl etmək lazımdır:

1) teoremin bir neçə isbatını vermək;
2) tərs, əks tərs və əks teoremləri tərtib etmək;
3) teoremin ümumiləşdirilməsinin mümkünlüyünü araşdır maq;

4) yeni teoremlə məlum teoremlərin əlaqəsini müəyyən etmək.

FƏSİL III. RİYAZİYYAT TƏLİMİNİN PRİNSİP, METOD VƏ FORMALARI

§1. Riyaziyyat təlimində didaktik prinsiplər

Komenski dövründən bəri qabaqcıl təlim təcrübəsi pedaqoqlar tərəfindən ümumiləşdirilərək təlim prinsipləri adlandırılmışdır. Bu prinsiplərdə təlim prosesinin vəzifələri, təlimdə müəllimin fəaliyyətinin əsas və mühüm cəhətləri əks olunur.

Riyaziyyatdan metodik ədəbiyyatda aşağıdakı didaktik prinsiplər sistemi qəbul edilir:

1) riyaziyyat təlimində elmilik prinsipi;
2) riyaziyyat təlimində şüurlu mənimsəmə, fəallıq və müstəqillik prinsipi;
3) riyaziyyat təlimində müvafiqlik prinsipi;
4) riyaziyyat təlimində əyanilik prinsipi;
5) riyaziyyat təlimində fərdi yanaşma prinsipi;
6) riyaziyyat təlimində biliklərin möhkəmliyi prinsipi.

Riyaziyyat təlimində elmilik dedikdə, təlimin məzmununun elmin müasir səviyyəsinə uyğun olması başa düşülür. Riyaziyyat təlimində elmilik prinsipi əsasən dərsliklərin yazılması ilə təmin olunur. Məlumdur ki, riyazi material təlim prosesinə didaktik işləndikdən sonra daxil edilir. Dərslik və ya didaktik sistem aşağıdakı tələbləri ödəməlidir:

1) didaktik sistem əks etdirdiyi elm sahəsini ona məxsus məntiqi və biliklər sistemini mümkün qədər saxlamalıdır;

2) didaktik sistemdə hər sonrakı tədris materialı özündən əvvəlki materialla əsaslandırılır;
3) didaktik sistemdə tədris materiallarının yerləşdirilməsi ardıcıllığı şagirdlərin inkişafda olan psixoloji xüsusiyyətlərinə uyğun olmalı və bu ardıcıllıq şagirdlərin riyazi təfəkkürünün sürətli inkişafına yardım etməlidir;
4) didaktik sistem elmi faktlar və anlayışlar arasındakı daxili əlaqəni açmalıdır.

Ənənəvi riyaziyyat təlimi yuxarıdakı tələbləri ödəmirdi, çünki:

a) hesab və cəbr süni surətdə bir-birindən təcrid edilmişdi;

b) həndəsə və cəbrdəki bəzi mövzuların əlaqəsi yox idi;

v) həndəsə digər məktəb fənlərindən təcrid olunmuşdu;

q) məktəb riyaziyyatı digər məktəb fənlərindən ayrı düşmüşdü.

Riyaziyyat təlimində elmilik prinsipinin reallaşmasına hər addımda nail olmaq olar. Məsələn, əgər müəllim riyazi anlayışlara tərif verərkən, riyazi mühakimələri qurarkən ifadələrin korrektliyinə diqqət yetirməyi və ya hər mühakiməyə tənqidi yanaşmağı şagirdlərdən tələb edirsə, o elmilik prinsipinə əməl edir. Təlimdə elmilik prinsipinin reallaşmasında hələ də maneələr vardır. Proqram və dərsliklərin mükəmməl olmamasını, ayrı-ayrı fənlər üzrə proqramların tam uyğun olmamasını buna misal göstərmək olar.

Riyaziyyat təlimində şüurluluq, fəallıq və müstəqillik prinsipləri aparıcı prinsip olmaqla təlimin müvəffəqiyyətini təmin edir. Şüurlu mənimsəmə dedikdə, şagirdlərin biliklərə elə dərindən yiyələnməsi başa düşülür ki, onlar aldığı bilikləri yeni konkret situasiyalarda tətbiq etməyi bacarırlar.

Şüurlu mənimsəmənin təmin olunması müəyyən çətinliklərlə bağlıdır. Bu çətinliklərin ən əsası mənimsəmə mexanizminin «kifayət qədər» öyrənilməməsidir, çünki «şagird verilən tədris materialını mənimsəmişdir» təklifini dəqiq söyləmək mümkün deyil. Əgər şagird verilən suallara cavab verirsə, verilən çalışmaları həll edirsə, onda müəyyən ehtimalla «şagird tədris materialını mənimsəmişdir» söyləmək olar. Əks halda «şagird bu materialı mənimsəməmişdir» demək olar. Təlim prosesində şagirdin tədris materialını necə mənimsəməsi haqqında daim informasiya almaq vacibdir. Buna yalnız pedaqoji cəhətdən düzgün qoyulmuş suallar sistemi vasitəsi ilə nail olmaq olar. Pedaqoji cəhətdən sual düzgün qoyulmuşdur dedikdə, biz həmin sualın şagirdi fəal zehni fəaliyyətə cəlb etdiyini başa düşürük. Təlim prosesində suallar elə tərtib olunmalıdır ki, onların tələb etdiyi informasiyanın həcmi optimal olsun. Əgər tələb olunan informasiyanın həcmi böyük olarsa, onda bu sual şagirdi fəal zehni fəaliyyətə cəlb etməz, çünki şagird bu informasiyanı qəbul etməkdə çətinlik çəkəcək. Əgər tələb olunan informasiyanın həcmi kiçik olarsa, onda bu sual yenə də şagirdi fəal zehni fəaliyyətə cəlb etməz, çünki cavab çox sadə və aşkardır.

Təlim prosesində şüurlu mənimsəmənin əks qütbündə şagirdin biliyindəki formalizm durur.

Riyaziyyat təlimində 2 ənənəvi nöqsan olur: a) formalizm; b) nəzəriyyənin praktikadan təcrid olunması.

Təlimdə şüurlu mənimsəməyə şagirdin tədris fəallığı sayəsində nail olmaq olar. Şagirdin tədris fəallığının 2 növünü fərqləndirirlər:

1) dar mənada fəallıq;
2) geniş mənada fəallıq.

Geniş mənada fəallıq şagirdlərin zehni fəaliyyətidir. Dar mənada fəallıq isə şagirdin riyazi fəalliyətidir. Təlim prosesində müəllim aşağıdakılar vasitəslə şagirdlərin tədris fəallığına nail ola bilər:

1) hər bir yeni bölmənin və mövzunun şərhini məsələlərin qoyuluşundan başlamaqla, yeni materialla köhnə material arasında əlaqə yaratmaqla, yeni materialın tətbiq sahələrini göstərməklə təşkil etdikdə;
2) hər bir yeni sualın öyrənilməsinə yaradıcı münasibət tərbiyə etməklə;
3) şagirdlərdə öz işinin nəticələrinə tənqidi münasibət tərbiyə etməklə.

Təlim prosesində şagirdlərin müstəqilliyi onların fəallığının və şüurluluğunun yüksək formasıdır. Ona görə də təlimdə şüurluluq və fəallığın təmin olunması şagirdin müstəqilliyinə nail olmaqdan ciddi asılıdır.

Riyaziyyat təlimində müvafiqlik prisipinin əasını tədris planı və proqramların tərtibində şagirdlərin yaş xüsusiyyətlərinin nəzərə alınması tələbi təşkil edir. Müvafiqlik prinsipi tələb edir ki, tədris materialının həcmi və məzmunu şagirdlərin zehni inkişaf səviyyəsinə, mövcud bilik, bacarıq və vərdişlərinə uyğun olsun. Müvafiqlik prinsipi təlimdə sadədən mürəkkəbə, asandan çətinə, məlumdan məchula müddəasının həyata keçirilməsini tələb edir. Ona görə də təlimdə sistemlilik və ardıcıllıq prinsiplərinin ciddi gözlənilməsi müvafiqlik prinsipinin həyata keçirilməsinə imkan yaradır.

Əyanilik riyaziyyat təlimində ən vacib prinsipdir. O mücərrəd təfəkkürün inkişafına köməklik göstərir. Obyekti inikas etdirmə xüsusiyyətinə görə əyaniliyin aşağıdakı növləri vardır:

1) natural əyanilik (obyektlər, hadisələr və s.);
2) təsviri əyanilik (tədris şəkilləri, modellər və s.);
3) simvolik əyanilik (cədvəllər, qrafiklər, sxemlər və s.).

Riyaziyyat təlimində simvolik əyaniliyin rolu çox böyükdür. Lakin əyaniliyin bu növü heç də hamı üçün başa düşülən deyildir. Şərti işarələr sistemi olmaqla simvolik əyanilik faktiki olaraq simvolik dildir. Ona görə də simvolik dili öyrənmək lazımdır. Məsələn, heç də şagirdlərin hamısı qrafik dili bilmir.

Təlimdə əyaniliyin səmərəsi əyani vasitələrin düzgün seçilməsindən və onların təlimdə düzgün tətbiq olunmasından asılıdır. Məsələn, planimetriya kursunun öyrənilməsində şəkil vacibdirsə, stereometriya kursunun öyrənilməsində isə şəkil artıq çox böyük əhəmiyyət kəsb etmir.

Təkliflərin və mühakimələrin məntiqi-riyazi dildə yazılması onların mahiyyətinin açılmasında böyük yardım göstərir.

Riyaziyyat təlimində biliklərin möhkəmliyi prinsipi şagirdlərdə sistemləşdərilmiş bilik, bacarıq və vərdişlərin uzun müddət ərzində yadda saxlanılmasını tələb edir. Buna tədris materialını əzbərləməklə nail olmaq olmaz. Biliklərin möhkəmliyi üçün onun fəal, şüurlu mənimsənilməsi zəruri şərtlərdir. Digər zəruri şərt isə təlimin elmiliyidir. Lakin bunlar kafi deyildir. Riyaziyyatın tədrisi metodikasında aşağıdakı müddəaların doğruluğu əsas götürülür:

a) yaddasaxlama təkrarlamaların sayı ilə düz mütənasibdir;

b) yalnız maraqlı və çox mühüm olan faktlar yadda qalır;

v) materialın yadda qalması üçün onun tətbiq sahəsi göstərilməlidir;

q) materialın yaxşı yadda qalması üçün onun məntiqi tam olan kiçik hissələrə bölünməsi vacibdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, bütün faktların isbatını yadda saxlamaq vacib deyildir. Ən zəruri faktları yadda saxlamaq, lazım olduqda isə tələb olunan təklifi isbat etməyi bacarmaq lazımdır.

Təlim prosesində hər bir şagirdin fərdi xüsusiyyətlərini nəzərə almaq vacibdir. Təlim prosesi hər bir şagirdin təfəkkürünün xüsusiyyətlərini, yaddaşının xüsusiyyətlərini, nitqini, görmə qabiliyyətini, iradəsini və s. nəzərə almaqla təşkil olunmalıdır. Hətta eyni sinfin iki müxtəlif şagirdində göstərilən xüsusiyyətlər çox müxtəlifdir. Bu da təlimdə fərdi yanaşmanı zəruri edir. Hər bir şagirdin fərdi öyrədilməsini təşkil etmək yalnız ideal halda mümkündür. Müasir şəraitdə informasiya texnologiyasından səmərəli istifadə etməklə buna qismən nail olmaq olar. Məsələn, təlimdə mükəmməl öyrədici proqram sistemlərindən istifadə olunması buna imkan verir. Təlimdə fərdi yanaşma prinsipini təmin etmək müəllimdən yüksək peşəkarlıq tələb edir. Hər bir konkret tədris materialının öyrənilməsini sinif kollektivini şərti olaraq zəif, orta və güclü qruplara ayırıb, öyrənmə prosesini hər qrup üçün ayrıca təşkil etmək də təlimdə fərdi yanaşmaya qismən nail olmağa imkan verə bilər.

§2. Elmi metodlar

Təlimdə müəllimin fəaliyyəti tədris, şagirdin zehni fəaliyyəti isə öyrənmə adlanır. Ona görə də təlim metodlarını tədris metodlarına və öyrənmə metodlarına bölmək olar.

Tədris metodlarını informasiyanın verilməsinin vasitə və qaydaları, şagirdin zehni fəaliyyətinin idarə olunmasının və dəyərləndirilməsinin vasitə və qaydaları təşkil edir.

Öyrənmə metodlarını tədris materialının mənimsənilməsinin vasitə və qaydaları, öyrənmə və özünüdəyərləndirmənin müxtəlif qaydaları təşkil edir.

Təlim prosesində müəllim şigirdlərə verilməsi zəruri olan informasiyanın verilməsini təmin edən öyrədici situasiyaları qurmalı, şagirdlərin müstəgil tədris fəaliyyətini təşkil etməli və idarə etməlidir. Şagird isə müəllimin yaratdığı öyrədici situasiyalarda sərbəst və ya müəllimin köməyi ilə riyazi biliklər sisteminə yiyələnməlidir.

Öyrənmə metodlarını şərti olaraq elmi və xüsusi öyrənmə metodlarına ayırmaq olar.

Elmi öyrənmə metodlarına məlum zehni fəaliyyət formalarına uyğun olan, müşahidə və təcrübə, müqayisə, analiz və sintez, induksiya, deduksiya və s. aid edilir.

Xüsusi öyrənmə metodlar orta məktəb üçün riyaziyyatın pedaqogikasında təlimin səmərəli təşkili üçün işlənib hazırlanmışdır. Buraya evristik metod, modellər üzrə öyrənmə, proqramlaşdırılmış öyrənmə və s. aid edilir.

Tədris metodlarına söhbət, şərh, mühazirə və şagirdin məşq xarakterli müstəqil işi aid edilir.

Əvvəlcə, öyrənmənin elmi metodlarını araşdıraq.

Metodologiyada metod real aləmin dərk edilməsi vasitəsi hesab olunur. O qoyulmuş məqsədə çatmaq üçün icra olunan əməliyyatlar sistemindən ibarətdir. Hər bir metodu iki cəhətdən xarakterizə etmək olur. Birinci cəhət öyrənilən və ya dəyişdirilən obyektlərdəki qanun-auyğunluqların mahiyyəti ilə bağlı olan biliklər sistemindən ibarətdir. Burada aşağıdakı biliklər təmsil olunur:

1) metodu əsaslandıran biliklər sistemi;
2) obyektlərin öyrənilməsi və ya dəyişdirilməsi zamanı əldə edilən biliklər sistemi;
3) metodun tətbiq sahələri haqqındakı biliklər sistemi;
4) metodun müxtəlif sahələrdəki tətbiqinin xüsusiyyətləri haqqında olan biliklər sistemi.

Metodu xarakterizə edən ikinci cəhət onu tətbiq etmək üçün tələb olunan fəaliyyətlə baglıdır. Bu cəhətdə aşağıdakılar təmsil olunur:

1) metod tətbiq edilərkən icra olunan fəaliyyət növləri;
2) metodu tətbiq etmək üçün tələb olunan vasitələr.

Riyaziyyat tədrisinin inkişaf tarixi göstərir ki, təcrübi elmlərin əsas tədqiqat metodu olan müşahidə və təcrübə riyaziyyat təlimində də səmərəli surətdə tətbiq oluna bilər. Riyaziyyat təcrübi elm olmasa da, riyazi həqiqətlərin empirik yolla aşkar edilməsi şagirdlərin fəal öyrədilməsinə imkan yaradır.

Müşahidə ətraf aləmin təbii şəraitdə götürülən obyekt və ya hadisələrin konkret xassə və münasibətlərinin tədqiq olunmasıdır. Müşahidə adi duyğu deyildir. Müşahidə konkret xassə və ya münasibət üçün aparılır və nəticəsi qeyd olunur.

Təcrübə obyekt və yə hadisələrin öyrənilməsinin elə metodudur ki, onun gedişində obyekt və ya hadisələrin təbii halına və ya inkişafına müdaxilə edilir, onları süni şəraitdə hissələrə parçalayır, ya da digər obyekt və hadisələrlə birləşdirirlər. Hər bir təcrübə müşahidə ilə müşaiyyət olunur. Təlim prosesində müşahidə və təcrübə aşağıdakı sxem üzrə tətbiq olunur: əvvəlcə, qeyd olunmuş xassə və ya münasibət xüsusi halda aşkar edilir, sonra isə həmin xassə və ya münasibət deduktiv metodların tətbiqi ilə əsaslandırılır. Məsələn, üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi haqqında teoremi isbat etməzdən əvvəl, şagirdlərə üçbucaq çəkib transportirlə onun daxili bucaqlarının cəmini hesablamağı tapşırmaq olar. Bu zaman bütün şagirdlərin nəticəsi 180^0-ə yaxın olacaqdır. Belə yanaşmanın üstünlüyü şübhəsizdir, çünki hər bir şagird üçbücağın daxili bucaqlarının cəminin 180^0 olduğunu təcrübi yolla yəgin edir. Başqa bir misala baxaq: Viyet teoremini isbat etməzdən əvvəl, müəllim şagirdlərə verilən kvadrat tənlikləri həll etmək, sonra isə tapılan köklərin cəmini və hasilini tapmağı tapşıra bilər. Alınan nəticələrin uyğun kvadrat tənliyin əmsalları ilə müqayisəsi şagirdləri Viyet teoreminin qoyuluşuna yönəldər.

Növbəti elmi metod müqayisədir. Myqayisə tədqiq olunan obyektlərin oxşarlığını və fərqini təyin etməkdən ibarətdir. Müqayisə olunan obyekt və faktların əlaqələrinin müəyyən edilməsi onların hər birinin mahiyyətini dərindən mənimsəməyə xidmət edir. Məktəb riyaziyyat kursunda müqayisənin tətbiqi üçün hədsiz imkanlar vardır. Məsələn, düz və tərs teoremlərin müqayisəsi onlar arasındakı məntiqi əlaqəni tapmağa xidmət edir. Qarşılıqlı tərs inikasların birgə öyrənilməsi düz və tərs funksiyaların qarşılıqlı əlaqəsini müəyyən etməkdə çox səmərəlidir. Məsələnin bir neçə həll üsulunun müqayisəsi ən optimal həll üsulunu tapmağa kömək etməklə bərabər, həm də şagirdin riyazi təfəkkürünün inkişafına təkan verir. Obyekt və faktların müqayisəsi aşağıdakı tələbləri ödəməlidir:

1) yalnız müəyyən əlaqəsi olan obyekt və hadisələri müqayisə etmək olar. Başqa sözlə müqayisə mənalı olmalıdır. Məsələn, üçbucağın perimetri ilə cismin kütləsini müqayisə etmək mənasızdır;
2) müqayisə planauyğun sürətdə aparılmalıdır. Başqa sözlə, obyektlər və ya hadisələr seçilmiş xassələrə görə müqayisə edilməlidir. Məsələn, çoxbucaqlıları sahələrinə görə, perimetrlərinə görə müqayisə etmək olar;
3) müqayisə tam olmalıdır. Başqa sözlə, riyazi obyektlərin eyni bir xassəyə görə müqayisəsi tam, axıra qədər aparılmalıdır.

Psixoloji tədqiqatlar göstərir ki, müqayisə metodu oxşar obyektlərin öyrənilməsini asanlaşdırır.

Analiz və sintez. İdrak prosesində analiz tamın hissələrinə ayrılması kimi, sintez isə hissələrdən tamın qurulması kimi başa düşülür, Məsələn, oyuncağı sökən uşaq özünəməxsus analiz aparır. Sökülmüş oyuncağı yığmaq istəyən uşaq isə özünəməxsus sintez aparır.

Analiz və sintez həm riyaziyyatda, həm də riyaziyyat təlimində mühüm tədqiqat metodu hesab olunur. Məsələlərin həlli metodu, teoremlərin isbatı metodu və riyazi anlayışların xassələrinin öyrənilməsi metodu kimi həm analiz, həm də sintez metodları tətbiq oluna bilər. Praktik olaraq analiz və sintez bir-birindən ayrılmazdır, onlar bir-birini tamamlayır. Məsələn, analiz vasitəsi ilə mürəkkəb məsələ sadə məsələlərə ayrılır, sonra isə sintez vasitəsilə sadə məsələlərin həllindən verilən mürəkkəb məsələnin həlli alınır.

Bir çox hallarda analiz nəticədən səbəbə aparan, sintez isə səbəbdən nəticəyə aparan idrak metodu kimi başa düşülür.

Aşağıdakı məsələyə baxaq: 2 qabda 19 alma vardır. Birinci qabda 9 alma varsa, ikinci qabda neçə alma var?

Əvvəlcə məsələnin hesabi həllini göstərək:

$$19 - 9 = 10 \text{ (alma).}$$

Bu həll sintezə əsaslanır.

İndi isə, məsələni tənlik qurmaqla həll edək:

x ilə ikinci qabdakı almaların sayını işarə etsək, onda şərtə görə $9+x=19$; $x=19-9$; $x=10$. Bu həll isə analizə əsaslanır.

İndi isə eyni bir təklifin həm sintez metodu ilə, həm də analiz metodu ilə isbatını verək: isbat etməli ki, $a > 0$ ədədi üçün $a + \frac{1}{a} \geq 2$ olur. Analiz metodu ilə isbatı:

$$a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0,$$

$$\frac{a^2 + 1 - 2a}{a} \geq 0,$$

$$a^2 + 1 - 2a \geq 0,$$

$(a-1)^2 \geq 0$ (doğruluğu aşkardır). Sintez metodu ilə isbatı isə

$$(a-1)^2 \geq 0,$$

$$\frac{a^2+1-2a}{a} \geq 0,$$

$$\frac{a^2+1}{a} - 2 \geq 0,$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ olur.}$$

Göstərilən isbatlardan aydın olur ki, analitik isbat zamanı başlanğıc təklif kimi isbat olunacaq təklifin özü götürülür. Sonra bu təklifdən məntiqi əsaslandırılan təkliflər ardıcıllığı vasitəsilə doğruluğu məlum olan təklif alınır. Sintetik isbab zamanı elə doğru təklif axtarılır ki, ondan məntiqi əsaslandırılan təkliflər ardıcıllığı vasitəsilə tələb olunan təklif alınsın. Sintetik isbat üçün başlanğıc təklif kimi bu və ya digər doğru təklifin nə üçün götürüldüyünün izah olunmaması xarakterikdir. Buna görə də sintetik isbat şagirdlərdə bir növ süni isbat təsəvvürü yaradır. Sintetik isbat zamanı başlanğıc təklifin seçilməsi əlavə çətinlik yaradır. Analitik isbat zamanı şagird isbata hansı təklifdən başlayacağını dəqiq bilir. Lakin bu metodun da özünəməxsus nöqsanları vardır. Ona görə də təlim praktikasında təkliflərin isbatı zamanı hər iki metoddan ardıcıl istifadə olunur.

Növbəti elmi metodlar ümumiləşdirmə, xüsusiləşdirmə və mücərrədləşdirmədir. Ümumiləşdirmə zamanı verilən çoxluqdan onu öz daxilində saxlayan daha geniş çoxluğa keçid baş verir. Məsələn, birinci həddi və fərqinə görə ədədi silsilənin n -i həddinin düsturunu yazarkən əvvəlcə, bu silsilənin bir neçə ardıcıl həddi yazılır:

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \text{ və s.}$$

Buradan $a_n = a_1 + (n-1)d \quad (n \geq 1)$ ümumiləşdirməsi aparılır. Bu düsturu bir daha ümumiləşdirmək olar: $y = kx + b,\ x \in N$. Başqa sözlə, istənilən ədədi silsilə natural arqumentli xətti funksiyadır. Sabit obyektin dəyişən obyektlə əvəz olunması,obyektə qoyulan məhdudiyyətin götürülməsi ümumiləşdirməyə misal göstərilə bilər.

Ümumiləşdirmə prosesi ilə sıx əlaqədə olan proses xüsusiləşdirmədir. Xüsusiləşdirmə zamanı verilən çoxluqdan onun daxilində yerləşən daha dar çoxluğa keçid baş verir. Məsələn, müsbət kəsr ədədlər çoxluğundan natural ədədlər çoxluğuna keçid xüsusiləşdirməyə misal göstərilə bilər.

Psixoloqlar belə hesab edirlər ki, analiz vasitəsilə aparılan ümumiləşdirmə şagirdin nəzəri təfəkkürünün formalaşmasına, müqayisə vasitəsilə aparılan ümumiləşdirmə isə şagirdin empirik təfəkkürünün formalaşmasına xidmət edir. İdrak prosesində insan obyekt və hadisələri ya obrazlarda, ya da anlayışlarda əks etdirir. İnsanın şüurunda anlayış öyrənilən obyektdə mühüm olmayan xassələrin fikrən atılması və müvafiq ümumiləşdirmə nəticəsində yaranır. Bu zehni proses elmi mücərrədləşdirmə adlanır.

Psixoloji nöqteyi-nəzərdən mücərrədləşdirmə analizin xüsusi formasıdır. Mücərrədləşdirmə öyrənilən obyektin verilən tədqiqat üçün mühüm olmayan xassələrindən fikrən imtina etməkdən və mühüm olan xassələrinin saxlanılmasından ibarət olan bir prosesdir.

Riyazi mücərrədləşdirmənin iki növü fərqləndirilir:

1) eyniləşdirmə aparmaqla mücərrədləşdirmə;
2) ideallaşdırma aparmaqla mücərrədləşdirmə.

Eyniləşdirmə aparmaqla mücərrədləşdirmə zamanı öyrənilən çoxluqda eynigüclülük münasibəti təyin edilir və eynigüclü obyektlər eyniləşdirilir. Rasional ədədlər çoxluğunun aşağıdakı tərifi buna misal göstərilə bidər:

$$Q = \left\{ x \middle| x = \frac{q}{p},\ q \in Z,\ p \in N,\ \text{ЯБОБ}\ (p,q) = 1 \right\}.$$

İdeallaşdırma aparmaqla mücərrədləşdirmə zamanı yeni obyektlər real obyektlərdən seçilib cötürülən əlamət və xassələrdən konstruksiya edilir. Bu zaman real obyektlərdə olmayan xassə və əlamətlərdən də istifadə oluna bilər. Düz xətt, müstəvi, çevrə və s. ideal anlayışlara misal göstərilə bilər.

Xüsusi öyrənmə metodları orta məktəbdə riyaziyyat təlimini səmərəli təşkil etmək üçün işlənib hazırlanmışdır. Bu metodlara evristik metod, modellər üzrə öyrənmə, proqramlaşdırılmış öyrənmə aid edilir.

I.D.Poya özünün «Как решать задачу» kitabında evristikanı ayrıca elm sahəsi kimi qəbul edir. O, hesab edir ki, evristikanın məqsədi kəşflərə və ixtiralara aparan metod və qaydaları tədqiq etməkdir. Tədris prosesində evristik metodun tətbiqi zamanı müəllim mənimsəniləcək informasiyanı hazır şəkildə vermir. O, şagird kollektivi qarşısında problemi (məsələ və teoremi) qoyur, sonra isə məqsədyönlü sualar verməklə problemi şagirdlərə həll etdirir. Deməli, evristik tədris metodu tətbiq olunarkən problemin həllinin tapılması prosesinin yalnız ümumi planı qurulur. Problemin həllini şagirdlərin özü sərbəst tapır.

Aşağıda mətnli məsələnin evristik söhbət metodu ilə həlli prosesi araşdırılır.

Məsələ: İki məntəqə arasındakı məsafəni gedərkən velisopedçinin orta sürəti 8 *km/s* olmuşdur. Velosipedçi geriyə gəldiyi yoldan 3 *km* uzun olan yolla qayıtmalı oldu. Bu zaman onun sərf etdiyi vaxt gəldiyi vaxtdan $\frac{1}{8}$ *saat* çox olmuş və orta sürəti 9 *km/s* olmuşdur. Məntəqələr arasındakı hər iki yolun uzunluğunu tapın.

Məsələdə verilənləri və tapılması tələb olunanları təhlil etdikdən sonra, müəllim şagirdlərin diqqətini verilənlər və tapılması tələb olunanlar arasındakı hələlik görünməyən əlaqəyə cəlb etməlidir. Ona görə də o evristik söhbəti aşağıda göstərilən kimi qura bilər:

Müəllim	**Şagird**
1) Məsələdə hansı kəmiyyətlər iştirak edir və onlardan hansı məlumdur?	2) Velosipedçinin yola sərf etdiyi zaman haqqında nə məlumdur?
	3) Məsələdə hansı kəmiyyəti tapmaq tələb olunur?
	1) Məsələdə yol, sürət və zaman kəmiyyətləri iştirak edir.

Velosipedçinin getdiyi yollardan biri o birindən 3 *km* qısadır. Birinci yoldakı orta sürət 8 *km/s*, o birində isə 9 *km/s* olmuşdur.

2)Velosipedçi geri qayıtmağa getdiyi vaxtdan $\frac{1}{8}$ *saat* çox vaxt sərf etmişdir.

3) Velosipedçinin getdiyi və qayıtdığı yolun uzunluğunu tapmaq tələb olunur.

4) Axtarılan məsafəni tapmaq üçün hansı kəmiyyətlərin qiymətindən istifadə etmək olar?

4) Əgər hərəkətin sürəti və zamanı məlum olarsa, məsafəni tapmaq olar.

5) Bu kəmiyyətlərdən hansının qiyməti məlumdur?

5) Hərəkətin sürəti məlumdur; gəlməyə və qayıtmağa sərf olunan zaman məlum deyil.

6) Bərabərsürətli hərəkətdə bu kəmiyyətlər arasında hansı əlaqə vardır?

6) $s = v \cdot t; v = \frac{s}{t}; t = \frac{s}{v}$.

7) Məsələdə verilənlərlə axtarılanlar arasında əlaqəni hansı məlum yarada bilər?

7) Axtarılan məsafə ilə məlum sürətlər arasındakı əlaqəni getməyə və qayıtmağa sərf olunan zamanların fərqinin $\frac{1}{8}$-ə bərabər olması yarada bilər.

8) Sizin gümanınız doğrudur. Bu əlaqəni konkret şəkildə necə yaratmaq olar?

8) Sükút.

9) Bu əlaqəni yaratmaq üçün hansı kəmiyyətin iki müxtəlif qiymətini müqayisə etmək lazımdır?

9) Hərəkətə sərf olunan zamanın qiymətlərini müqayisə etmək əlverişlidir, çünki onların fərqi $\frac{1}{8}$-ə bərabərdir.

10) Getməyə sərf olunan zamanı ifadə etmək üçün nə etmək lazımdır?

14) Alınan tənliyi məlum qayda ilə hell etmək lazımdır.

10) Məsafəni x ilə işarə edib onu hərəkətin sürətinə bölmək lazımdır: $\frac{x}{8}$.

11) Velosipedçinin geri qayıtdığı yolun uzunluğunu necə ifadə etmək olar?

11) Bu yol birincidən 3 *km* çox olduğundan onu $(x+3)$ kimi yazmaq olar.

12) Qayıtmağa sərf olunan zamanı necə ifadə etmək ola?

12) Geri qayıdarkən sürət 9 *km/s* olduğundan sərf olunan zaman $\frac{x+3}{9}$ olar.

13) Bu zamanları necə müqayisə etmək olar?

13) $\frac{x+3}{9} - \frac{x}{8} = \frac{1}{8}$.

14) $8(x+3) - 9x = 9$

$-x = -15$

$x = 15.$

15) Tapılan qiymət hansı kəmiyyətindir?

15) Velosipedçinin gəldiyi yolun uzunluğudur.

16) O biri yolun uzunluğu neçə *km*-dır?

16) 15+3=18 *km*.

Evristik metodun tətbiqi təcrübəsi göstərir ki, bu metoddan geniş istifadə etmək şagirdin tədris fəaliyyətinə güclü təsir göstərir: şagirdlər riyaziyyatı müstəgil öyrənməyə daha böyük maraq göstərirlər. Qeyd etmək lazımdır ki, evristik metodun geniş tətbiqi proqramda nəzərdə tutulan məqsədlərə çatmağa daha çox tədris vaxtı sərf etməyə səbəb olur. Ona görə də bu metoddan rasional surətdə istifadə etmək lazımdır.

Fəal öyrənmə metodu (modellər üzrə öyrənmə metodu). Ənənəvi tədris metodları şagirdlərdə riyaziyyatı öyrənməyə fəal münasibət formalaşdırmırdı və tədris materialını hər bir şagirdin fəal, özünə məxsus sürətlə öyrənməsini təmin etmirdi. Şagirdin fəal öyrənməsini təmin etmək üçün ona konkret obyekti öyrənmək üçün həmin obyektin üzərində təcrübələr aparmağa imkan yaradılmalıdır. Bu məqsəd üçün əyani və didaktik vəsaitlərdən istifadə etmək lazım gəlir. Bu zaman çalışmaq lazımdır ki, didaktik vasitələrlə şagirdlərin özü işləsin. Bu zaman şagirdin təfəkküründə konkretdən mücərrədə keçid nisbətən sürətlə baş tutur.

Təlimdə didaktik vasitələrin xüsusi növü olan didaktik oyunlar da xüsusi rol oynayır. Hər bir didaktik oyunun kökündə müəyyən bilik durur. Oyun zamanı bu bilik uşağın yaddaşına fəal sürətdə daxil olur.

Proqramlaşdırılmış təlimi öyrənmə prosesində şagirdin zehni fəaliyyətinin optimal idarə olunması sistemi kimi başa düşmək olar. Belə təlim zamanı şagirdin bilik, bacarıq və vərdişlər sisteminə yiyələnməsi və bu zaman onların müstəgilliyi əsasən aşağıdakı kimi təşkil edilir: 1) öyrənilməsi nəzərdə tutulan material hissələrə bölünür; 2) hər hissənin sonunda şagirdin mənimsəmə səviyyəsini yoxlamaq üçün çalışmalar verilir; 3) hər bir şagirdə hissəni necə mənimsədiyi haqqında informasiya verilir; 4) hər bir şagirdə öz nöqsanlarını aradan qaldırmaq üçün zəruri məsləhətlər verilir.

Proqramlaşdırılmış təlimin ənənəvi riyaziyyat təlimindən hansı fərqli əlamətləri vardır?:

1. Təlimdə fərdi yanaşmaya daha yaxşı müvəffəq olmaq.
2. Şagirdin müstəgil öyrənməsinə geniş imkan yaratmaq.
3. Şagirdlərin bir-birini təkrarlayan şifahi cavablarını ixtisar etmək.
4. Şagirdlərin təlimdəki nöqsanlarını tez aşkar etmək və s.

Proqramlaşdırılmış təlimin təşkili üçün proqramlaşdırılmış dərslik və dərs vəsaitləri tərtib olunmalıdır. Proqramlaşdırılmış dərslikdə tədris materialı hər biri mənimsənilməsi zəruri olan minimum informasiyadan ibarət olan hissələrə bölünür. Hər-bir hissə suallarla qurtarır. Bu suallar şagirdlərin mənimsəmə səviyyəsini dəyərləndirmək üçün nəzərdə tutulur. Orta məktəblər üçün tərtib edilən proqramlaşdırılmış dərs və dərs vəsaitləri xətti və budaqlanma üsulu ilə tərtib olunurlar.

Əgər proqramlaşdırılmış tədris materialında şagirdə yeni informasiya onun əvvəlki hissədəki cavabları nəzərə alınmadan verilərsə, onda belə material xətti üsulla proqramlaşdırılmış adlanır. Əgər proqramlaşdırılmış tədris materialında şagirdə yeni informasiya onun əvvəlki hissədəki cavabları nəzərə alınmaqla verilərsə, onda belə material budaqlanma üsulu ilə proqramlaşdırılmış adlanır.

Xətti üsulla proqramlaşdırılan mətnə nümunə göstərək:

1. $y = kx + b$ şəklində funksiya xətti funksiya adlanır (burada k və b əmsallardır). $y = 2x - 1$ funksiyası xəttidirmi?

2. $y = \frac{2}{x} - 1$ funksiyası xətti dirmi?

1. Bəli.

2. Xeyir.

Dərsin proqramlaşdırılmış tədris materialları ilə aparılması üçün aşağıdakılar zəruridir:

1) hər bir şagird proqramlaşdırılmış tədris materialı ilə təmin olunmalıdır;
2) hər bir şagird bu materialla müstəgil işləmək üçün zəruri olan göstərişlərlə təmin olunmalıdır.

Şagirdlərin müstəqil öyrənmə fəaliyyətini təşkil etmək üçün, müəllim materialın əsas mahiyyətini qısa şərh edə bilər. Qeyd etmək lazımdır ki, proqramlaşdırılmış tədris materialı ilə şagirdlərin müstəqil işi müəllimin nəzarəti altında və əsasən dərsdə yerinə yetirilməlidir. İşi başa çatdırmayan şagirdlərə işin qalan hissəsini evdə qurtarmağı tapşırmaq olar.

Proqramlaşdırılmış təlimin nöqsanları da vardır: 1) proqramlaşdırılmış təlim prosesində tərbiyə etmək imkanları azalır; 2) müəllimin və şagirdlərin birgə fəaliyyəti məhdudlaşır və s.

§3. Riyaziyyatın tədrisinin ənənəvi metodları

Riyaziyyatı öyrətməyin ən səmərəli metodlarından biri öyrədici söhbətdir. Öyrədici söhbəti düzgün təşkil etmək yçyn ona ciddi hazırlaşmaq lazımdır. Bunun üçün:

1) mövzunu hərtərəfli və dərindən öyrənmək lazımdır;
2) mövzunun mühüm xüsusiyyətlərini nəzərə almaq lazımdır;
3) aparılacaq söhbətin məqsədlərini aydın təsəvvür etmək lazımdır;
4) söhbətin gedişində istifadə ediləcək biliklərin həcmini və məzmununu dəqiq müəyyən etmək lazımdır;

5) dərsin gedişində söhbətin yerini və vaxtını düzgün müəyyən etmək lazımdır.

Öyrədici söhbətin plan-icmalını tərtib edərkən müəllim şagirdlərə veriləcək əsas və əlavə sualları dəqiq göstərməlidir (gənc müəllimlər bu sualların cavabını da göstərməlidir). Bəzi hallarda kimə hansı sualın verilməli olduğunu da göstərmək olar. İcmalda müəllimin yazı lövhəsinə çağıracağı şagirdlərin adını göstərmək olar. Öyrədici söhbətin gedişində istifadə olunacaq didaktik vasitələr əvvəlcədən hazırlanmalıdır. Şagirdlər üçün nəzərdə tutulan suallar elə tərtib olunmalıdır ki, onların çətinliyi tədricən artsın və öyrənilən mövzunu tam əhatə etsin. Suallar aydın və yığcam şəkildə tərtib olunmalıdır. Öyrədici söhbətin sonunda şagirdlərə mənimsəmə səviyyəsini müəyyən etməyə imkan verən sadə çalışmalar verilməlidir.

Əsasən, yeni materialın izahı zamanı tətbiq olunan tədris metodları mühazirə və müəllimin şərhidir. Bu metodların tətbiqi zamanı müəllimin fəaliyyəti əsas olsa da, şagirdlərin fəal tədris fəaliyyəti vacibdir. Mühazirə və şərh fəal zehni fəaliyyətə maraq və tələbat oyatmalıdır. Mühazirə və şərhi dinləyərkən şagird müəllimlə birlikdə öyrənilən riyazi faktların axtarılması, müəyyən edilməsi və əsaslandırılması üzərində düşünməlidir. Mühazirə və şərhin gedişi müəllimin «nə üçün?», «faktı əsaslandırmaq üçün nə etmək lazımdır?», «bunu necə etmək olar?», «bunu başqa cür etmək olmazmı?», «nədən başlamaq lazımdır?» və s. sualları ilə müşaiyyət olunmalıdır. Belə sualların yeni materiala aid hissəsinə əsasən müəllim özü cavab verməli olur. Başqa sözlə, mühazirə və şərh müəllimin öz-özü ilə dialoqu şəklində aparılır.

Müasir tələblərə görə, mühazirə və şərh elə təşkil olunmalıdır ki, onun pedaqoji səmərəsi söhbətdən az olmasın. Mühazirə formasında dərsləri əsasən yuxarı siniflərdə (VIII-XI s.) aparmaq olur. Yeni materialın izahı zamanı mühazirə və şərhdən o zaman istifadə olunur ki, ya material nisbətən çətindir, ya da çox mühüm əhəmiyyətə malik olur.

Məktəb riyaziyyat kursunun bəzi məsələlərini şagird dərsliklərdən istifadə etməklə özü müsiəqil öyrənməyi bacarmalıdır. Buna nail olmaq üçün müəllim şagirdləri müstəqil öyrənməyə hazırlamalıdır. Bu məqsədlə müəllim şagirdlərə aşağıdakı məsləhətləri verə bilər:

1) dərslikdə tədris materialını öyrənərkən əsas anlayışların tərifini, teoremləri, nümunə kimi verilən məsələ və misalları seçib ayırmaq lazımdır;
2) bu hissələri diqqətlə oxumaq və başa düşməyə çalışmaq lazımdır;
3) teoremi öyrənərkən onun şərtini və hökmünü müəyyən etmək, bu teoremin öyrənilmiş teoremlərlə əlaqəsini müəyyən etmək lazımdır;
4) teoremin isbatını oxuyarkən isbatın gedişini addım-addım oxumaq lazımdır. Konkret addımı öyrəndikdən sonra onu müstəqil aparmağa çalışmaq lazımdır;
5) birinci oxunuşda materialın əsas ideyasını başa düşməyə çalışın. Aydın olmayan detalları sonraya saxlayın;
6) ikinci oxunuşda isbatın bütün detallarına diqqət yetirmək lazımdır;

7) tədris materialını öyrəndikdən sonra onu bir iki dəfə müstəqil şərh etməyə çalışın və s.

FƏSİL IV. RİYAZİYYATIN TƏLİMİ PROSESİNDƏ ŞAGİRDLƏRİN TƏFƏKKÜRÜ VƏ İDRAK MARAQLARININ İNKİŞAF ETDİRİLMƏSİ

§1. Riyazi təfəkkürün əsas komponentləri

Riyaziyyat təliminin keyfiyyəti təkcə şagirdlərin riyazi bilik, bacarıq və vərdişlər sisteminə yiyələnməsinin möhkəmliyi və dərinliyi ilə yox, həm də onların riyazi bilik, bacarıq və vərdişlərdən istifadə etməklə elmlərə müstəqil yiyələnməsinin səviyyəsi ilə təyin olunur. Məlumdur ki, konkret elmi problemin həlli prosesini aşağıdakı əsas mərhələlərə bölmək olar:

- problemin qoyuluşu;
- problemin digər problemlərdən fərqləndirilməsi;
- problemin digər problemlərlə əlaqədə olduğu bütün halların müəyyən edilməsi;
- həll planının axtarılmasının planlaşdırılması;
- ən böyük ehtimallı hipotezin seçilməsi;
- bü hipotezin yoxlanılması üçün aparılacaq eksperimentlərin planlaşdırılması və keçirilməsi;
- alınan nəticələrin əsaslandırılması;
- optimal həll metodunun seçilməsi;
- alınan nəticələrin yeni situasiyalara köçürülməsinin mümkünlüyünün araşdırılması və s.

Elmi təfəkkür problemin göstərilən mərhələlərlə həllini təmin edən bacarıqlar küllisi ilə xarakterizə oluna bilər.

Riyazi təfəkkür də elmi təfəkkürün bir formasıdır. Riyazi təfəkkürü aşağıdakı komponentlərə ayırırlar:

- konkret təfəkkür;
- mücərrəd təfəkkür;
- funksional təfəkkür;
- intuitiv təfəkkür.

Konkret təfəkkürün iki forması fərqləndirilir:

- qeyri-operativ konkret təfəkkür (müşahidə, hissi duyğu);
- operativ konkret təfəkkür (obyektin konkret modeli ilə bilavasitə bağlı fəaliyyət).

Qeyri-operativ konkret təfəkkür məktəbəqədər yaşlı uşaqlara və kiçik yaşlı məktəblilərə xas olan təfəkkür formasıdır. Belə uşaqlar yalnız əyani obrazlara əsaslanan düşüncəyə malik olur. Aparılan psixoloji təcrübələr göstərir ki, kiçik yaşlı məktəblilər anlayışları başa düşmür və onların ətraf aləm haqqında bilgisi təsəvvürlər səviyyəsindədir. Şagirdləri mücərrəd anlayışları başa düşməyə hazırlamaqda operativ konkret təfəkkürün əhəmiyyəti əvəzsizdir. Müstəqil zehni fəaliyyətin formalaşmasında kiçik yaşlı məktəblinin praktik fəaliyyəti həlledici rol oynayır. Ona görə aşağı siniflərdə riyaziyyat təlimində əyanilik mühüm əhəmiyyət daşıyır.

Yuxarı siniflərdə şagirdin dərk etmə prosesində konkret təfəkkürün tutumu azalır. Onun yerini müsərrəd təfəkkür tutur.

Mücərrəd təfəkkür tədqiq olunan obyektin ümumi xassələrini öyrənmək üçün onun konkret məzmunundan fikrən ayrılmaq bacarığı ilə xarakterizə olunan təfəkkürdür.

Təlim prosesində mücərrəd təfəkkür aşkar və qeyri-aşkar şəkildə təzahür edə bilir. Məsələn:

a) həndəsə kursunda həndəsi fiqur anlayışını daxil edərkən onun fəzadakı vəziyyəti və ölçüləri istisna olmaqla qalan konkret xassələrini nəzərə almırıq. Bu halda tədqiq olunan obyektin mühüm olmayan xassələrindən aşkar şəkildə imtina olunur;

b) konkret çoxluğun elementlərini saydıqda bu çoxluğun hər bir elementinin konkret xassələri nəzərə alınmır. Bu halda qeyri-aşkar şəkildə çoxluğun elementləri eyniləşdirilir.

Müccərəd təfəkkür öz növbəsində:

1) analitik;
2) məntiqi;
3) fəza təfəkkürlərinə bölünür.

Analitik təfəkkür dərketmə prosesinin ayrı-ayrı mərhələlərinin aydınlığı ilə, bu prosesin həm məzmununun və həm də gedişində tətbiq olunan əməliyyatların tam mənimsənilməsi ilə xarakterizə olunur. Təlim prosesində analitik təfəkkür aşağıdakılar vasitəsi ilə təzahür edir:

1) teoremlərin isbatında, məsələ və misalların həllində analitik üsuldan istifadə etməklə;
2) məsələlərin tənlik qurmaqla həlli ilə;
3) müəyyən məsələnin həllinin araşdırılması ilə və s.

Şagirdləri yuxarıda göstərilən riyazi fəaliyyət formalarına cəlb etməklə, müəllim onlarda analitik təfəkkürün inkişafına kömək edir.

Analitik təfəkkür mücərrəd təfəkkürün digər növlərindən təcrid olunmuş şəkildə təzahür etmir, əksinə onlarla vəhdətdə təzahür edir.

Məntiqi təfəkkür müəyyən ilkin şərtlərdən nəticə çıxarmaq, ümumi müddəanı xüsusi hallara ayırmaq, konkret nəticəni əvvəlcədən görmək, alınmış nəticələri ümumiləşdirmək və s. bacarıqları ilə xarakterizə olunan təfəkkürdür. Məlumdur ki, təlim prosesində şagirdin məntiqi təfəkkürünü inkişaf etdirmək müəllimin ən mühüm vəzifəsidir. Təlim prosesində məntiqi təfəkkür aşağıdakılar vasitəsilə təzahür edir:

1) teoremlərin isbatı zamanı induktiv və deduktiv mühakimələrin aparılması ilə;
2) məsələ və misalların həllinin əsaslandırılması ilə və s.

Fəza təfəkkürü fəza obrazlarını və ya öyrənilən obyektləri fikrən qurmaq və onlar üzərində uyğun real obyektlər üzərində aparılan əməliyyatlara adekvat olan əməliyyatlar aparmaq bacarıqları ilə xarakterizə olunan təfəkkürdür. Məlumdur ki, stereometriya kursunun öyrənilməsində şagirdin fəza təfəkkürünün formalaşması həlledicidir. Şagirdin fəza təfəkkürünü formalaşdırmaq üçün gərgin hazırlıq işi aparılmalıdır. Şagirdin fəza təfəkkürünün formalaşmasında texniki vasitələrin də müəyyən rolu vardır.

Qeyd edək ki, riyazi təfəkkürün tərkibinə elmi idrak metodlarına uyğun olan zehni fəaliyyət formaları da daxil edilir. Şagirdin bu və ya digər riyazi obyekti və ya riyazi obyektlər arasındakı münasibəti sxemlər vasitəsilə ifadə edə bilmək bacarığı da fəza təfəkkürü ilə sıx bağlıdır. Belə sxemlərə aşağıdakılar aid edilə bilər:

1) məsələnin həllini və ya müəyyən şərti əks etdirən sxemlər;
2) konkret fəza situasiyasını əks etdirən sxemlər və s.

Analitik təfəkkürdən fərqli olaraq, intuitiv təfəkkürdə dərketmə prosesinin mərhələləri fərqləndirilmir. Bu zaman problemin həllini tapan şəxs onu nəyin vasitəsi ilə tapdığını dərk etmir. İntuitiv təfəkkür adətən konkret bilik sahəsi üzrə dərin bilik və təcrübəyə malik olan şəxslər üçün xarakterikdir. İntuitiv mühakimənin nəticələrinin induktiv və deduktiv vasitələrlə əsaslandırılması zəruridir.

Ənənəvi riyaziyyat təlimində şagirdin intuitiv təfəkkürünün inkişafına diqqət yetirilmirdi. Məsələn, düşüncəli uşağın özünəməxsus cavabı dəyərincə qiymətləndirilmirdi; öz biliyini aydın şərh edə bilməyən, lakin onları düzgün tətbiq edərək doğru nəticə alan şagirdin biliyi çox çalışan, öz biliyini düzgün şərh edən, lakin onları demək olar ki, tətbiq edə bilməyən şagirdin biliyindən aşağı tutulurdu. Müasir riyaziyyat təlimi şagirdin intuitiv təfəkkürünün inkişafına xüsusi diqqət yetirməyi nəzərdə tutur. Təlim prosesində şagirdlərin əsaslandırılmayan doğru cavablarına qayğı ilə yanaşmaq tələb olunur.

Şagirdlərdə intuitiv təfəkkürün təzahürünə aid bir misal göstərək. Məsələn, $x+8=17$ tənliyinin həll alqoritmini bilməyən şagird tənlikdə x-in yerinə 9 yazıb onun kök olduğunu müəyyən bilər. Bu halda intuitiv təfəkkür təzahür edir. Əgər o, x-in yerinə başqa ədəd fikirləşsə idi, onda o, yoxlamaqla həmin ədədin kök olmadığını yəqin edə bilərdi.

Qeyd edək ki, analogiya əsasında mühakimə apardıqda əksər hallarda intuitiv təfəkkür təzahür edir. Təlimdə intuitiv təfəkkürün rolunu şişirtmək olmaz, çünki təkcə intuisiya predmeti yaxşı bilməyi təmin edə bilməz.

Funksional təfəkkür riyazi obyektlər arasındakı xüsusi və ümumi əlaqələrin dinamikasının dərk edilməsi ilə xarakterizə olunur. Funksional təfəkkür məktəb riyaziyyat kursunda funksiya anlayışı ilə bağlı olan ideyaların öyrənilməsi prosesində aydın təzahür edir.

Hələ «Riyazi təhsilin islahatları uğrunda» beynəlxalq hərəkatın fəaliyyətinin erkən vaxtlarında aparıcı tələblərdən biri məktəblilərin funksional təfəkkürünün inkişafı idi.

Funksional təfəkkürü inkişaf etdirən vasitələrdən biri funk-sional məzmunlu məsələlər sisteminin həllidir. Ümumi halda, belə məsələlər sisteminin həllində 3 mərhələ öz əksini tapır:

1) öyrənilən hadisənin obyektləri arasındakı mühüm, əsas əlaqələr seçilib ayrılır, qalan mühüm olmayan əlaqələr nəzərə alınmır və müxtəlif sadələşdirmələr aparılır;
2) öyrənilən hadisənin obyektləri arasındakı mühüm, əsas əlaqələr ədədi verilənlərlə ifadə olunur (cədvəllərlə, düsturlarla, qrafiklərlə və s.);
3) alınan riyazi münasibətlər məlum riyazi qanunlar əsasında tədqiq olunur və tədqiqatın nəticələri öyrənilən hadisənin anlayışları vasitəsilə şərh olunur.

§2. Riyaziyyat təlimində məsələ və misalların rolu

Təhsilin əsas məqsədlərinə uyğun olaraq məsələ və misallar aşağıdakı funksiyaları yerinə yetirir:

1) təhsil vermək;
2) tərbiyə etmək;

3) inkişafetdirmək;
4) yoxlamaq.

Təlim prosesində bu funksiyalar bir-biri ilə sıx əlaqədə olur və onların hansının aparıcı olduğunu təyin etmək çox çətin olur.

Məsələ və misalların təhsil funksiyası şagirdlərdə riyazi bilik, bacarıq və vərdişlər sisteminin formalaşmasına xidmət edir. Məsələn, əsas riyazi anlayışların formalaşmasına, anlayışlar arasındakı əlaqələrin müəyyən edilməsinə, riyazi dilin mənimsənilməsinə, modelləşdirmə bacarıq və vərdişlərinin formalaşmasına xidmət edən məsələ və misallar əsasən təhsil vermək funksiyasını yerinə yetirirlər.

Məsələ və misalların tərbiyə etmək funksiyası şəgirdlərdə mütərəqqi dünyagörüşü, öyrənməyə maraq hissi, müstəqillik və s. formalaşdırmağa xidmət edir.

Məsələ və misalların inkişafetdirmək funksiyası şagirdlərdə riyazi təfəkkürünün inkişafına, o cümlədən onlarda müşahidə, müqayisə, analiz, sintez, ümumiləşdirmə, mücərrədləşdirmə, konkretləşdirmə aparmaq bacarıqları formalaşdırmağa xidmət edir.

Məsələ və misalların yoxlamaq funksiyası şagirdlərin bilik, bacarıq və vərdişlərinin səviyyəsini, onların riyazi iəfəkkürünün inkişafı səviyyəsini və öyrənməyə marağının səviyyəsini təyin etməyə xidmət edir.

Məsələ və misallar təlim prosesində həm öyrənmə obyekti, həm də öyrətmə vasitəsidir. Ona görə də riyaziyyat təliminin keyfiyyətinin yüksəldilməsində məsələ və misalların rolu əvəzsizdir.

Riyazi məsələ və misalların müxtəlif təsnifatı vardır. Hətta ənənəvi riyaziyyat təlimində də məsələ və misalları tiplərə ayrılmış, konkret tipə aid olma əlamətləri müəyyən edilmiş və hər bir tipə aid məsələ və ya misalların ümumi həlli sxemi işlənib hazırlanmışdır.

Hər bir məsələ və ya misalda şərt və tələb olunan fərqləndirilir. Şərt və tələb olunanın arasındakı münasibətə görə məsələ və misalları aşağıdakı növlərə ayırmaq olar:

1) müəyyən məsələ və misallar;
2) qeyri-müəyyən məsələ və misallar;
3) artıq verilənli məsələ və misallar.

Əgər məsələ və misalda tələb olunanı tapmaq üçün verilənlər kafidirsə və onlar arasında artıq olanı yoxdursa, onda o müəyyən məsələ və misal adlanır.

Əgər məsələ və misalda verilənlər tələb olunanı tapmaq üçün kafi deyilsə, onda o qeyri-müəyyən və ya çatışmayan şərtli məsələ və misal adlanır.

Əgər məsələ və misalda tələb olunanı tapmaq üçün verilənlər artıqdırsa, onda o artıq verilənli məsələ və misal adlanır.

Göründüyü kimi bu təsnifatı ciddi saymaq olmaz, çünki elə çalışma tərtib etmək olar ki, onda verilənlərin bəzisi artıq olsa da onların hamısı çalışmanı həll etmək üçün az olar.

Məsələ və ya misalın həlli prosesini ümumi halda aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

1) məsələ və ya misalın şərti ilə tanışlıq mərhələsi;
2) həll planının axtarılması mərhələsi;
3) məsələ və ya misalın həll mərhələsi;
4) həllin tədqiqi mərhələsi.

Məsələ və misalın həlli üsuluna görə onları aşağıdakı növlərə ayırmaq olar:

1) hesablamaya aid məsələlər;
2) isbata aid məsələlər;
3) qurmaya aid məsələlər.

Qurmaya aid məsələ dedikdə tələb olunan fiquru yalnız xətkeş və pərqardan istifadə etməklə qurmaq tələb olunan məsələ başa düşülür.

Qurmaya aid məsələnin həlli prosesini aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

1) həllin axtarılması;
2) həllin əsaslandırılması;
3) qurmanın yerinə yetirilməsi;
4) həllin tədqiqi.

Bu mərhələlər içərisində ikinci mərhələ – həllin əsaslandırılması xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

Təlim prosesində şifahi həll olunan riyazi tapşırıqların böyük əhəmiyyəti vardır.

Şifahi həll olunan riyazi tapşırıqlarla işi aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

1) tapşırığın tərtib olunması;
2) tapşırığın yerinə yetirilməsi;
3) cavabın yoxlanılması;
4) nisbətən mürəkkəb, oxşar tapşırığa keçid.

Pedaqoji cəhətdən müxtəlif üsullarla həll olunan çalışmalarla iş daha səmərəlidir. Bu zaman:

1) şagirdlərin zehni fəaliyyəti fəallaşır;

2) təlimin keyfiyyəti fəndaxili və fənlərarası yeni əlaqələrin aşkar edilməsi sayəsində yüksəlir.

Təlim prosesində şagirdin məsələ və misal tərtib etməsinə və sonra onu həll etməsinə xüsusi diqqət yetirilməlidir. Bu işə şagirdləri hazırlamaq üçün müəllim məqsədyönlü iş aparmalıdır.

Riyazi məsələ və misalları standart və qeyri-standart növlərə də ayırırlar. Aydındır ki, belə bölgü də şərtidir, çünki eyni məsələ və ya misal bir şagird üçün qeyri-standart olsa da, digəri üçün standart ola bilər.

Konkret dərs üçün, məsələ və misal seçərkən aşağıdakı suallara cavab axtarılmalıdır:

1) seçilən məsələ və misal dərsin əsas didaktik məqsədinə uyğundurmu?
2) seçilən məsələ və misal əvvəlki dərslərdə həll olunan məsələ və misallarla əlaqəlidirmi?
3) seçilən məsələni ümumiləşdirmək olarmı?
4) məsələnin və ya misalın verilənləri məqsədəuyğundurmu?

Dərsin əsas didaktik məqsədinə uyğun olaraq məsələ və misallar sistem şəklində seçilir: məsələn, anlayışların mənimsənilməsinə xidmət edən məsələ və misallar sistemi, teoremlərin isbatının mənimsənilməsinə xidmət edən məsələ və misallar sistemi və s.

Məsələ və misallar sistemi aşağıdakı tələbləri ödəməlidir:

1) sistemdəki məsələ və misallar dərsin əsas didaktik məqsədlərinə uyğun olmalıdır;
2) sistemdəki məsələ və misallar həm öz aralarında, həm də keçmiş və gələcək mövzularla əlaqəli olmalıdır;

3) sistemdəki məsələ və misallar bütün mühüm və xarakterik situasiyaları əhatə etməlidir;
4) sistemdə məsələ və misallar sadədən mürəkkəbə doğru yerləşdirilməlidir.

Şagirdləri fəal zehni fəaliyyətə cəlb etmək və onların müstəqilliyinə nail olmaq üçün müxtəlif üsullarla həll oluna bilən məsələ və misallar çox mühüm vasitədir.

Təlimdə məsələ və misalların ümumi həll üsullarının öyrənilməsinə nail olmaq vacibdir. Eyni tipli məsələ və misalların həllinə aludə olmaq lazım deyil. Məsələ və misalların həllinin səmərəli öyrənilməsi üçün müəllim aşağıdakılara əməl etməlidir:

1) sistemli şəkildə qeyri-standart çalışmalar həll etmək;
2) çalışmaları müxtəlif üsullara həll etmək;
3) oxşar çalışmalar tərtib etmək və həll etmək;
4) həll olunan çalışmanı ümumiləşdirmək;
5) həll olunan çalışmanın xüsusi hallarını tədqiq etmək;
6) çatışmayan şərtli və artıq şərtli çalışmalar həll etmək;
7) çalışmanı başqa dillərə tərcümə etmək və s.

FƏSİL V. RİYAZİYYAT TƏLİMİNİN TƏŞKİLİ

§1. Riyaziyyat dərsinə qoyulan tələblər. Riyaziyyat dərslərinin növləri və quruluşu

Orta məktəbdə təlim-tərbiyə işinin əsas təşkilat forması dərsdir. Dərsin xarakterik xüsusiyyətləri aşağıdakılardır: dərsin məqsədi, məzmunu, vasitə və metodları və tədris fəaliyyətinin təşkili.

Bunlar içərisində dərsin məqsədləri (təhsil, tərbiyə və inkişafetdirici) əsas rol oynayır. Təhsil məqsədlərinə riyazi bilik, bacarıq və vərdişlərin formalaşdırılması aid edilir. Dərsdə həm də tərbiyənin və məktəblinin şəxsiyyətinin inkişafının məqsədləri həyata keçirilir. Dərsə qoyulan əsas tələblər aşağıdakılardır:

1) dərs məqsədyönlü olmalıdır; bu o deməkdir ki, dərsin əsas didaktik məqsədi olmalıdır. Hər bir konkret dərsdə bir yox bir neçə didaktik məqsəd həyata keçirilə bilər. Lakin bunların içərisində birini əsas götürüb, qalanlarını isə həmin məqsədə tabe etdirmək olar;
2) riyaziyyat dərslərinə qoyulan ikinci tələb onun məzmununun səmərəli seçilməsidir. Dərsin məzmunu aşağıdakı tələbləri ödəyir:

   a) dərsin məzmunu onun əsas didaktik məqsədinə uyğun olmalıdır;

   b) dərsin tədris materialının həcmi rasional olmalıdır;

   v) dərsdə konkret ilə mücərrədin nisbəti optimal olmalıdır;

   q) dərsdə nəzəriyyə ilə praktikanın zəruri qarşılıqlı əlaqəsi əks olunmalıdır;

d) dərsdə şagirdlərin fəal təlimini təmin edən təlim üsulları tətbiq edilməlidir;

e) dərs düzgün təşkil olunmalıdır. Bu o deməkdir ki, şagirdlərə dərsin əsas tədris vəzifələri aydındır; şagirdlər dərsdə tədris vəzifələrinin həlli zamanı fəaldırlar;dərsin vaxtı təlim-tərbiyə vəzifələrinin yerinə yetirilməsi üçün əlverişli surətdə istifadə olunur.

Bu tələblərin müvəffəqiyyətlə yerinə yetirilməsi üçün aşağıdakılar zəruridir:

1) müəllim dərsin materialını və bütövlükdə fənni yüksək səviyyədə bilməlidir və tədris materialının şərhi zamanı o, sərbəst olmalıdır;
2) müəllim hər bir növbəti sualın öyrədilməsi metodikasını bilməlidir;
3) müəllim sinif şagirdlərinin hər birinin fərdi xüsusiyyətini bilməli və onların hər birirnin qarşılaşacağı çətinliyi proqnozlaşdırmalı və güclü şagirdlərin yüklənməsi üçün materiala malik olmalıdır.

Əsas didaktik məqsədinə görə riyaziyyat dərslərinin aşağıdakı nöiləri vardır:

1) yeni materialla tanışlıq dərsi;
2) biliklərin möhkəmləndirilməsi dərsi;
3) bilik, bacarıq və vərdişlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsi dərsi;
4) öyrənilən materialın sistemləşdirilməsi və ümumiləşdirilməsi dərsi.

Dərslərin göstərilən növlərinin hər birini əsas didaktik məqsədləri və mərhələləri ilə tanış olaq.

I. Yeni materialla tanışlıq dərsinin əsas didaktik məqsədi kimi aşağıdakılar götürülə bilər: – «anlayışı daxil etmək» və ya «xassəni müəyyən etmək», və ya «alqoritmi qurmaq» və s. Bu dərsin əsas mərhələləri aşağıdakılardır: 1)yeni materialın öyrənilməsinə hazırlıq (baza biliklərinin aktuallaşdırılması); 2) yeni materialla tanışlıq; 3) öyrənilən yeni materialın ilkin möhkəmləndirilməsi; 4) ev tapşırığının verilməsi; 5) dərsin yekunu.

II. Biliklərin möhkəmləndirilməsi dərsinin əsas didaktik məqsədi kimi aşağıdakılar götürülə bilər:– «müəyyən bilikləri formalaşdırmaq» və ya «mövzu üzrə bilikləri formalaşdırmaq».

Bu dərsin əsas mərhələləri bunlardır: 1) ev tapşırığının yoxlanması; 2) öyrənilən materialın möhkəmləndirilməsi; 3) ev tapşırığının verilməsi; 4) dərsin yekunu.

III. Bilik, bacarıq və vərdişlərin yoxlanması və qiymətləndirilməsi dərsinin əsas didaktik məqsədi aşağıdakı götürülə bilər: «şagirdlərin mənimsəmə səviyyəsini müəyyən etmək». Belə dərsin əsas mərhələləri aşağıdakılardır: 1) tapşırığın yerinə yetirilməsi üzrə şagirdlərə göstəriş verilməsi; 2) şagirdlərin müstəqil işi; 3) dərsin yekunu.

Dərsin icmalında aşağıdakılar öz əksini tapmalıdır:

1) dərsin mövzusu;
2) dərsin məqsədləri;
3) dərsin quruluşu və dərsin hər bir mərhələsinin vəzifəsi;
4) dərsin hər bir mərhələsinin məqsədinə uyğun olan tədris materi-

alı;

5) şagirdlərin fəaliyyətini təşkil etmək qaydaları;

6) təlim vasitələri;

7) dərsdə yerinə yetirilən tapşırıqların mənimsənilməsinin yoxlanılması;

8) ev tapşırıqlarının yerinə yetirilməsi üzrə göstərişlər.

Dərsin təhlili zamanı aşağıdakı əlamətlər əsas götürülür:

1) dərsin məqsədinin reallaşdırılması;

2) dərsin riyazi məzmununun elmi səviyyəsi;

3) dərsin ümumi quruluşunun təhlili;

4) dərsdə istifadə olunan təlim metodları;

5) dərsdə müəllim və şagirdlərin fəaliyyəti;

6) şagirdlərin zehni fəaliyyət vərdişlərinin formalaşdırılması.

Bundan əlavə dərsi psixoloji, etik, gigieniya və s. əlamətlərə görə də təhlil etmək olar.

Optimal təlim metodunun seçilməsi müəllimin həll etdiyi metodik məsələlərdən ən çətinidir. Pedaqoji ədəbiyyatlarda optimal təlim metodlarının seçilməsinə dair tövsiyyələr vardır; məsələn, bu tələblər:

1) dərsin məqsədi;

2) öyrənilən materialın məzmunun xüsusiyyətləri (mürəkkəblik, yenilik və s.);

3) sinif şagirdlərinin xüsusiyyətləri (təfəkkürün inkişaf səviyyəsi, bilik və bacarıqların səviyyəsi, vərdişlərin formalaşdırılması, şagirdlərin tərbiyə səviyyəsi);

4) sinif otağının didaktik materiallar, texniki vasitələrlə təchizi;

5) erqonometrik şərait (dərsin cədvəl üzrə aparılması, vaxtı, şagird-

lərin sayı və s.);

6) müəllimin fərdi xüsusiyyətləri, bu və ya digər metoda yiyələnmə səviyyəsi, onun siniflə münasibəti və s. nəzərə alınmazsa, seçilən təlim metodu optimal sayıla bilməz.

Dərsin gedişi boyu müəllim şagirdlərin dərsdəki fəaliyyətini idarə edir, onları öyrənməyə həvəsləndirir və onlarda öz fəaliyyətini dəyərləndirməyə tələbat hissi formalaşdırır.

§2. Şagirdlərin bilik və bacarıqlarının yoxlanılmasının forma, üsul və vasitələri.

Yoxlamanın kim tərəfindən aparıldığından asılı olaraq yoxlamanın aşağıdakı tipləri fərqləndirilir:

1) xarici;
2) qarşılıqlı;
3) özünü yoxlama.

Şagirdlərin fəaliyyəti üzərində xarici yoxlamanı müəllim aparır.

Qarşılıqlı yoxlama bir şagirdin digərinin fəaliyyətini yoxlamasıdır.

Özünü yoxlama şagirdin öz fəaliyyətini yoxlamasıdır.

Şagirdlərin bilik və bacarığının yoxlanılmasının əsas məqsədləri aşağıdakılardır:

1) müvəffəqiyyətlərin müəyyən edilməsi;
2) bilik və bacarıqların təkmilləşdirilməsi yollarının vaxtında müəyyən edilməsi.

Yoxlama aşağıdakı funksiyaları yerinə yetirir:

1) təlimin nəticələrini aşkar etmək və diaqnostikasını təşkil etmək;
2) biliklərin səviyyəsini yüksəltmək, bilikləri sistemləşdirmək və tədris fəaliyyətini təşkil etmək metodlarını müəyyən etmək;
3) şagirdlərin fəaliyyətinin həvəsləndirici qiymətləndirilməsini təmin etmək və şagirdlərin öyrənmə fəallığını inkişaf etdirmək;
4) hər bir şagirddə öz fəaliyyətinin nəticəsinə məsuliyyət hissi və öyrənmə marağı tərbiyə etmək;
5) bilik və bacarıqların mənimsənilməsi prosesini idarə etmək.

Şagirdlərin bilik və bacarıqlarının yoxlanılması zamanı aşağıdakı komponentlər fərqləndirilir:

1) konkret tədris materialının öyrənilməsinin məqsədlərini dəqiqləşdirmək və yoxlamanın məzmununu təyin etmək;
2) yoxlamanın müəyyən edilmiş məqsədlərə uyğun olan növ, forma, üsul və vasitələrini seçmək;
3) yoxlamanın nəticələrinin ifadə vasitələrini seçmək.

Yoxlamanın konkret məzmunu yoxlanılacaq biliyin informasiya və əməliyyat tərkibindən asılı olaraq müəyyən edilir. Yoxlamanın məqsəd və məzmununu müəyyən etmək üçün müxtəlif yanaşma variantları mümkündür:

1) konkret tədris materialının öyrənilməsi nəticəsində formalaşan bilik və bacarıqların keyfiyyətini göstərmək; məsələn, dolğunluq, dərinlik, şüurluq və s.;
2) mənimsəmə səviyyəsini göstərmək və s.

Müəllim qabaqcadan şagirdlərin yoxlanılacaq biliklərinin proqramın tələblərinə uyğun olan mənimsəmə səviyyəsini müəyyən etməli, bunun haqqında şagirdlərə məlumat verməlidir.

Yoxlamaların aşağıdakı növləri fərqləndirilir:

1) şagirdlərin fəaliyyətini yoxlamaq məqsədi ilə aparılan yoxlama. Belə yoxlamaları son nəticəyə görə yoxlamaya, şagirdlərin fəaliyyətinin müəyyən parametrlərini müəyyən etmək üçün aparılan yoxlamaya və s. bölmək olar;
2) təlim prosesində müəyyən vaxtlarda aparılan yoxlama. Belə yoxlamanın aşağıdakı növləri fərqləndirilir:

   a) cari yoxlama;

   b) gündəlik yoxlama;

   v) vaxtaşırı yoxlama.

Yoxlamanın aşağıdakı formaları vardır:

1) kütləvi;
2) fərdi.

Kütləvi formada aparılan yoxlamaları sorğu, məqbul və imtahana bölürlər. Fərdi formada aparılan yoxlamaları isə fərdi sorğu, məqbul və imtahana bölürlər.

Yoxlama üsullarının aşağıdakı növləri vardır:

a) yazılı;

b) şifahi;

v) praktik iş.

Yoxlama vasitələri müəyyən edilərkən cavabın ifadə forması əsas götürülür. Belə vasitələri sərbəst tapşırığa və testlərə bölürlər. Səbəst tapşırıqda qoyulan suala cavab sərbəst ifadə olunur. Belə tapşırıqlar sual, misal və məsələdən ibarət olur.

Testlərin aşağıdakı növləri vardır:

a) tamamlanmasını tələb edən testlər;

b) doğru cavabın seçilməsini tələb edən testlər.

Birinci növdən olan testlərdə şagirdlərdən onlara verilən tapşırıqda boş buraxılmış sözləri (və ya simvolları) tamamlamaq tələb olunur.

Doğru cavabın seçilməsini tələb edən testləri aşağıdakılara bölmək olar:

a) təklif olunan iki cavabdan düzünü seçməyi tələb edən test;

b) çarpaz seçməni tələb edən test;

v) çoxluqdan seçməni tələb edən test.

Çarpaz seçməni tələb edən testdə bir neçə sual və o sayda doğru cavab olur. Tapşırığı yerinə yetirən şagird suallara uyğun doğru cavabları özü seçməlidir.

Çoxluqdan seçməni tələb edən testdə bir sual və bir neçə cavab olur. Ona cavab verən şagird sualın düz cavabını seçməlidir.

Bilik və bacarıqların yoxlanılması qiymətləndirmə və qiymətlə sıx bağlıdır. Qiymətləndirmə insan tərəfindən aparılan proses, qiymət isə qiymətləndirmə prosesinin nəticəsinin ifadə vasitəsidir.

§3. Riyaziyyatdan sinifdənkənar və məktəbdənkənar məşğələlər

Müasir cəmiyyətin riyazi biliyə malik mütəxəssislərə böyük ehtiyacı olduğundan məktəblilərdə riyaziyyatı öyrənməyə maraq hissi tərbiyyə etmək lazımdır. Riyaziyyat dərslərində bu elmə maraq hissi tərbiyə etmək üçün imkan vardır. Amma hər bir dərsin əsas təhsil məqsədi olduğunu da nəzərə alsaq, onda riyaziyyata maraq hissi tərbiyə etmək üçün riyaziyyatdan əlavə məşğələlərə böyük ehtiyac olduğu qənaitinə gələrik. Riyaziyyatdan əlavə məşğələlər sinifdənkənar və məktəbdənkənar məşğələlərə bölünür.

Riyaziyyatdan sinifdənkənar məşğələlər dedikdə müəllimin rəhbərliyi altında dərsdən kənar vaxtlarda aparılan və məcburi olmayan məşğələlər başa düşülür. Sinifdənkənar məşğələlərin iki növü fərqləndirilir:

1) proqramda öyrənilməsi zəruri sayılan tədris materialının mənimsənilməsində geridə qalan şagirdlərlə aparılan məşğələlər;
2) digər şagirdlərlə müqayisədə üstün riyazi bacarığı və həvəsi olan şagirdlərlə aparılan məşğələlər.

Geridə qalan şagirdlərlə sinifdənkənar məşğələlər zərurət yarandıqda hər bir sinifdə təşkil olunmalıdır. Geridə qalan şagirdlərlə aparılan sinifdənkənar məşğələlərin əsas məqsədi şagirdlərin məktəb riyaziyyat kursu üzrə bilik və bacarıqlarındakı problemləri vaxtında ləğv etməkdir.

Geridə qalan şagirdlərlə sinifdənkənar məşğələlərin aparılması zamanı aşağıdakı tələblər əsas götürülür:

1) əlavə məşğələlər geridə qalan, eyni səviyyəli şagirdləri böyük olmayan qruplara ayırmaqla təşkil olunmalıdır;
2) əlavə məşğələlərdə hər bir şagird fərdi tapşırıqla təmin olunmalı və onların yerinə yetirilməsi zamanı hər bir şəgirdə konkret kömək göstərilməlidir;
3) əlavə məşğələlər həftədə bir dəfədən çox olmamaqla aparılmalıdır;

4) əlavə məşqələlərdə konkret riyazi bölmənin təkrar öyrənilməsindən sonra yekun yoxlama işi aparılmalıdır;
5) hər bir şagirdin konkret riyazi bölməni öyrənərkən geri qalmasının səbəbləri təhlil olunmalıdır və s.

Riyyaziyyatı öyrənməyə xüsusi həvəsi olan şagirdlərlə aparılan məşğələlərin əsas məqsədləri aşağıdakılardır:

1) şagirdlərdə riyaziyyatı öyrənməyə dayanıqlı maraq hissi oyatmaq və bu marağı inkişaf etdirmək;
2) şagirdlərin riyazi biliklərini proqramın tələblərinə uyğun genişləndirmək və dərinləşdirmək;
3) şagirdlərin riyazi təfəkkürünü inkişaf etdirmək;
4) şagirdlərə dərslik və elmi-populyar ədəbiyyatla müstəqil işləməyi öyrətmək;
5) şagirdlərin elm və texnikanın inkişafında riyaziyyatın rolu və əhəmiyyəti haqqında təsəvvürlərini genişləndirmək və dərinləşdirmək və s.

Riyaziyyatı öyrənməyə böyük marağı və bacarığı olan şagirdlər üçün sinifdənkənar məşğələlərin aşağıdakı formaları vardır:

- riyaziyyat dərnəyi;
- riyazi müsabiqə və olimpiadalar və s.

Riyaziyyat dərnəyi sinifdənkənar məşğələlərin ən səmərəli formasıdır. Riyaziyyat dərnəyinə bir qayda olaraq, riyaziyyatı öyrənməyə xüsusi həvəsi olan şagirdlər cəlb olunur. Riyaziyyat dərnəyinin məşğələləri həftədə bir dəfə olmaqla bütün tədris ili müddətində təşkil olunur. Riyaziyyat dərnəyində öyrənilən materialların mövzusunu əsasən, görkəmli riyaziyyatçıların həyat və yaradıcılığı, riyaziyyatın inkişafı tarixindən maraqlı hadisələr, riyaziyyat dərslərində dərindən öyrənilməsi mümkün olmayan tədris materialları təşkil edir.

Şagirdlərin riyazi hazırlığının səviyyəsini qaldırmaqda, onları riyaziyyatı müstəqil öyrənməyə cəlb etməkdə müxtəlif səviyyələrdə təşkil olunan riyaziyyat olimpiadalarının da xüsusi əhəmiyyəti vardır.

XÜSUSİ METODİKA

§1. Ədədi sistemlər

Ədədi sistemlər məktəb riyaziyyat kursunda I-XI siniflərdə öyrənilir. İbtidai məktəbdə $N_0 = \{0,1,2,...,n,...\}$ (N_0 - mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğudur) çoxluğunda hesab əməlləri və onların xassələri öyrənilir. V-VIII siniflərdə Q rasional ədədlər çoxluğunda cəbri əməllər və onların xassələri öyrənilir. VIII sinifdə irrasional ədəd anlayışı daxil edilir: əvvəlcə rasional olmayan ədədin varlığı göstərilir. Sonra isə, irrasional ədədə tərif verilir. VIII sinifdə sonsuz onluq kəsrlərin köməyi ilə həqiqi ədədlərin təsnifatı verilir. Daha sonra, həqiqi ədədlər çoxluğu ilə ədəd oxunun nöqtələri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğun olduğu göstərilir. Həqiqi ədədin mütləq qiyməti anlayışı ədəd oxu üzərində ədədə uyğun olan nöqtədən koordinat başlanğıcına qədər olan məsafə kimi daxil edilir.

Həqiqi ədədlər meydanının xassələrini öyrənmək üçün məktəb riyaziyyat kursunda müxtəlif materiallardan istifadə olunur: eynilik çevirmələri, tənliklər, məsələlər və s. Məlumdur ki, toplama və vurma əməlləri təyin olunmuş M çoxluğunda aşağıdakı şərtlər ödənərsə, onda M çoxluğu meydan adlanır:

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) $xy = yx$;

4) $x(yz) = (xy)z$;

5) $x(y+z)=xy+xz$;

6) $0+x=x$;

7) $1\cdot x=x$;

8) $x+(-x)=0$;

9) $x\cdot\dfrac{1}{x}=1 \quad (x\neq 0)$.

Həqiqi ədədlər meydanının nizamlı və dolu olması xassələri haqqında təsəvvürlər məktəb riyaziyyat kursunda ədəd oxundan istifadə etməklə formalaşdırılır.

Məlumdur ki, «>» (böyükdür) münasibəti təyin olunmuş M meydanında bu münasibət aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, onda M nizamlı meydan adlanır:

1) istənilən $x, y\in M$ üçün ya $x>y$, ya $x=y$, ya da $y>x$ münasibətlərindən yalnız biri doğrudur;
2) əgər $x>y$ və $y>z$ isə, onda $x>z$ olur;
3) əgər $x>y$ isə, onda istənilən z üçün $x+z>y+z$ olur;
4) əgər $x>y$ isə, onda istənilən $z>0$ üçün $xz>yz$ olur.

Məktəb riyaziyyat kursunda həqiqi ədədlər çoxluğunun doluluğu və Arximed şərtini ödəməsi haqqında məlumat şagirdlərə geniş şəkildə verilmir. Həqiqi ədədlər çoxluğunun bu xassələri haqqında təsəvvürlərin yaradılmasında koordinat düz xətti üzərindəki nöqtələrin xassələrindən istifadə olunur. Qeyd edək ki, M nizamlı meydanı aşağıdakı şərti ödədikdə, o Arximed şərtini ödəyən meydan adlanır: istənilən $\alpha\in M$ üçün elə $k\in N$ var ki, $\alpha<k$ olur. Bu xassədən

məktəb riyaziyyat kursunda geniş istifadə olunur. Məsələn, həqiqi ədədin tam hissəsinin tapılmasında bu xassədən istifadə olunur.

Kompleks ədəd anlayışının daxil edilməsi ilə orta məktəbdə ədədi sistemlərin öyrənilməsi başa çatır.

Kompleks ədəd anlayışının daxil etdilməsi prosesində metodik çətinlik yaranmır.

Kompleks ədədi daxil edərkən qeyd etmək olar ki, ədədi sistemlərin genişləndirilməsi həm praktik tələbatdan, həm də riyaziyyat elminin daxili tələbatından baş vermişdir. Bu fikri əsaslandırmaq üçün aşağıdakıları misal göstərmək olar:

1) $x+a=b$ tənliyinin istənilən $a,b\in N$ üçün həllinin olması tələbi mənfi ədəd anlayışını daxil etmək zərurətini yaratmışdır;
2) $ax=b$ tənliyinin istənilən $a,b\in Z, a\neq 0$ üçün həllinin olması tələbi rasional ədəd anlayışını daxil etmək zərurətini yaratmışdır;
3) $ax^2=b$ tənliyinin istənilən $a,b\in Q, ab\geq 0, a\neq 0$ üçün həllinin olması tələbi irrasional ədəd anlayışını daxil etmək zərurətini yaratmışdır;
4) $ax^2=b$ tənliyinin istənilən $a,b\in R,\ \ a\neq 0$ üçün həllinin olması tələbi kompleks ədəd anlayışını daxil etmək zərurətini yaratmışdır.

Kompleks ədəd anlayışını daxil etdikdən sonra triqonometrik funksiyalarla kompleks ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş üstlü funksiyaların əlaqəsini göstərmək olar. Bunu aşağıdakı kimi etmək olar: $y=\cos\varphi+i\sin\varphi$ funksiyasını diferensiallayaq:

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i^2\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = iy\,.$$

Buradan $\frac{dy}{y} = id\varphi$. Sonuncu bərabərliyi inteqrallasaq

$$\ln y = i\varphi,$$

yəni $y = e^{i\varphi}$ olar. Onda $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ alınar. Bu düsturu ilk dəfə L.Eyler isbat etmişdir.

L.Eyler düsturundan aşağıdakıları almaq olar:

$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$ olduğundan

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$$

alınar.

Demək olar ki, insanın praktik fəaliyyətinin elə sahəsi yoxdur ki, o sahədə təqribi hesablamalara ehtiyac olmasın. Təqribi hesablama üsullarını bilmək şagirdə həm fizika və kimya kurslarının məsələlərini həll etmək, həm də özünün qarşılaşdığı praktik ölçmə işlərinin nəticələrini qiymətləndirmək imkanı yaradır. Digər tərəfdən, təqribi hesablama üsullarını öyrənərkən şagirdin ədədi sistemlər haqqında təsəvvürü genişlənir; o, dəqiq qiyməti ölçülə bilməyən kəmiyyətlərlə tanış olur. Ona görə də təqribi hesablama üsulları riyazi təhsilin bir hissəsi kimi orta məktəb riyaziyyat kursunda öyrənilir.

Təqribi hesablama üsullarının öyrənilməsi zamanı yaranan əsas çətinlik odur ki, təqribi hesablamaların nəzəri əsasları riyaziyyat kursunda öyrənilir, amma onlardan istifadə etmək bacarıqları digər məktəb fənlərində formalaşdırılır (fizika, kimya və s.). Təcrübə göstərir ki, şagirdlərin riyaziyyat kursunda öyrəndiyi bu biliklər göstərilən fənlərin öyrənilməsində tətbiq olunmur.

Məktəb riyaziyyat kursunda aşağıdakı təqribi hesablama üsulları öyrənilir:

1) sadə təqribi hesablama qaydaları;
2) sərhədlər üsulu;
3) xətaların sərhədlərinin hesablanması üsulu.

VII sinifdə təqribi hesablamanın əsas anlayışları daxil edilir. Bunlar aşağıdakılardır:

- xəta,
- mütləq xəta,
- nisbi xəta.

x ədədi ilə onun a təqribi qiymətinin fərqi təqribi ədədin mütləq xətası adlanır və Δa kimi işarə olunur:

$$\Delta a = |x - a| .$$

Əgər $\Delta a \le h_a$ olarsa, onda a ədədi x-in h_a dəqiqliklə götürülmüş təqribi qiyməti adlanır və bu belə işarə olunur:

$$x = a \pm h_a .$$

$\frac{\Delta a}{a}$ kəmiyyəti nisbi xəta adlanır.

Kəmiyyətin təqribi qiymətinin onluq kəsr şəklində yazılışının α rəqəmi təqribi qiymətin mütləq xətası α-ın yazıldığı mərtəbə vahidini aşmadıqda doğru rəqəm adlanır.

Sorğu kitablarında kəmiyyətlərin təqribi qiymətləri doğru rəqəmlərlə yazılır. Məsələn, sorğu kitabında Ayın kütləsi

$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kq göstərir. Ayın kütləsinin təqribi qiymətinin mütləq xətasını qiymətləndirək. Ayın kütləsinin dəqiq qiymətini m ilə işarə edək. Bütün rəqəmlər doğru olduğuna görə

$$m = (7{,}35 \pm 0{,}01) \cdot 10^{22}$$

olur. Bu ifadəni sadələşdirdikdən sonra

$$m = 7{,}35 \cdot 10^{22} \pm 10^{20}$$

alırıq.

Deməli, sorğu kitabında göstərilən təqribi qiymətin mütləq xətası 10^{22} kq -dan kiçik və ya ona bərabərdir. İndi isə, təqribi qiymətin nisbi xətasını tapaq:

$$\frac{10^{20}}{7{,}35 \cdot 10^{22}} = \frac{1}{735}.$$

Təqribi qiymətlər üzərində hesab əməlləri aparılarkən aşağıdakı qaydaya əməl olunur: təqribi qiymətləri topladıqda, çıxdıqda, vurduqda və böldükdə nəticənin qiymətini dəqiqliyi az olan komponentin dəqiqliyinə uyğun olaraq yuvarlaqlaşdırmaq lazımdır.

Təqribi hesablamaların praktik qaydalarını öyrənərkən konkret praktik məsələləri həll etmək daha əlverişlidir. Ona görə ki, belə məsələlərin həlli zamanı ölçmə işlərini də şagirdin özü aparmalı olur.

Sərhədlər üsulu çox sadə üsuldur və fizika kursunda geniş tətbiq olunur. Bu üsul tətbiq edilərkən əvvəlcə başlanğıc verilənlərin qiymətlərinin aşağı sərhədləri hesablanır, sonra isə yuxarı sərhədləri hesablanır. Axırda isə son nəticənin xətası qiymətləndirilir. Hesab əməllərinin nəticələri sərhədlər üsulu ilə aşağıdakı kimi təyin edilir. Əgər

$a \le x \le b$ və

$c \le y \le d$ olarsa, onda:

1) $a + c \le x + y \le b + d$;

2) $a - d \le x - y \le b - c$;

3) $ac \le xy \le bd \quad (a > 0, c > 0)$;

4) $\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \quad (a > 0, c > 0)$.

Göründüyü kimi, sərhədlər üsulunu tətbiq etmək üçün ədədi bərabərsizliklərin xassələrini bilmək lazımdır (bu mövzu VIII sinifdə öyrənilir).

Təqribi hesablama üsullarının əsas anlayışları ölçmə praktikası ilə bağlıdır. Əsas anlayışların daxil edilməsinə hazırlıq mərhələsində əsas rolu ölçmə işləri oynayır. Məlumdur ki, konkret obyektin riyazi modelinin qurulması prosesi ölçmə işləri ilə bağlıdır. Şagirdlər bilməlidir ki, ölçmə xətaları obyektiv səbəblərdən yaranır; kəsilməz qiymətli kəmiyyətlər dəqiq və təqribi qiymətlərlə xarakterizə olunur; kəsilməz qiymətli kəmiyyətin dəqiq qiyməti anlayışı riyazi abstraksiyadır. Yalnız diskret funksiyasının dəqiq qiyməti haqqında danışmaq olar və s.

Kəmiyyətin dəqiq və təqribi qiymətləri anlayışlarını konkret və şagirdlərə tanış olan məsələlər vasitəsi ilə daxil etmək lazımdır. Aşağıdakı məsələyə baxaq: «Aralarındakı məsafə 325 *km* olan A və B məntəqələrindən 30 *dəq*. intervalla 3 qatar yola düşdü…». Məsələnin şərtinə görə $AB = 325\ km$, qatarların yola düşmələri arasındakı interval 30 *dəq*., qatarların sayı 3 və s. Bunlar içərisində yalnız qatarların sayı dəqiq qiymətdir. Lakin məsafənin 325 *km* olduğunu dəqiq söyləmək olmaz. 325 məsafənin təqribi qiymətidir; 30 *dəq*. intervalın təqribi qiymətidir, çünki məsafəni və zamanı müəyyən dəqiqliklə ölçmək mümkündür.

Praktik məsələni riyazi metodların tətbiqi ilə həll etdikdə alınan nəticənin nə qədər etibarlı olmasını bilmək çox vacibdir. Əgər alınan nəticə etibarlı deyilsə, onda həmin metod verilən məsələni həll etmək üçün yararsız olur.

İndi isə xətaların sərhəddi üsulu ilə tanış olaq. Əgər $|x - a| \le h_a$ olarsa, onda a ədədi x-in h_a dəqiqliyi ilə götürülmüş təqribi qiyməti adlanır. Buradan alınır ki,

$$a - h_a \le x \le a + h_a .$$

$a - h_a$ fərqi x-in aşağı sərhəddi, $a + h_a$ cəmi isə x-in yuxarı sərhəddi adlanır. h_a kəmiyyəti a təqribi qiymətinin mütləq xətasının sərhəddi adlanır. $\varepsilon_a = \dfrac{h_a}{|a|}$ kəmiyyəti isə a təqribi qiymətinin nisbi xətasının sərhəddi adlanır. Xətaların sərhəddi üsulu ilə təqribi hesablamalar aparılarkən toplama və çıxma əməlləri üçün mütləq xətanın sərhəddi hesablanır. Məsələn, a və b təqribi qiymətlərinin cəmi üçün

$$h_{a+b} = h_a + h_b$$

olur.

Bu üsulun tətbiqi ilə vurma və bölmə əməlləri üçün nisbi xətanın sərhəddi hesablanır. Məsələn, a və b təqribi qiymətlərinin hasili üçün

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

olur, burada $\varepsilon_a = \dfrac{h_a}{|a|}$, $\varepsilon_b = \dfrac{h_b}{|b|}$ -dir. Xətaların sərhədlərini hesablamağa çox vaxt sərf olunduğundan xətaların sərhəddi üsulu məktəb praktikasında geniş tətbiq olunmur.

§2. Elementar funksiyaların öyrənilməsi metodikası

Funksiya anlayışı və bu anlayış ilə sıx əlaqəsi olan digər əsas anlayışlar VII sinifdə daxil edilir.

Hazırda məktəb riyaziyyat kursunda funksional xətt aparıcı xətt olmaqla digər bölmələrin öyrənilməsi tərzini müəyyən edir. Funksiya anlayışı vasitəsi ilə riyaziyyat təlimində çox müxtəlif fəndaxili və fənlərarası əlaqələr yaratmaq olur.

Elementar funksiyaları tam, rasional, qüvvət, üstlü, loqarifmik, triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyalar siniflərinə ayırmaq olar.

Funksiya anlayışı riyaziyyatın real aləmlə bilavasitə bağlı olan fundamental anlayışlarından biridir. Riyaziyyatın inkişafı prosesində funksiya anlayışı ciddi dəyişikliklərə məruz qalmışdır. Məsələn, L.Eylerin vaxtında funksiya anlayışı analitik ifadə anlayışı ilə eyniləşdirilirdi. Dirixlenin vaxtında isə funksiya bir kəmiyyətin digərindən asılı olaraq dəyişməsi kimi qəbul edilirdi. Funksiya haqqında belə təsəffürlərin əsas nöqsanı funksiya anlayışının kəmiyyət, dəyişmə və asılılıq kimi çox mürəkkəb anlayışlar vasitəsi ilə təyin edilməsidir.

Məktəb riyaziyyat kursunda funksiya anlayışı bir neçə variantda daxil edilir: bir variantda funksiya ilk anlayış kimi daxil edilir. Başqa variantda inikas ilk anlayış kimi daxil edilir, funksiya isə bir ədədi çoxluğun digər ədədi çoxluğa inikası kimi daxil edilir. Üçüncü variantda isə funksiya anlayışı ədədi çoxluqların elementləri arasında xüsusi münasibət kimi daxil edilir. Nəhayət, funksiya çoxluqlarının elementləri arasında qarşı qoyma kimi də daxil edilir.

Tutaq ki, hər hansı $X \neq \varnothing$ ədədi çoxluğu verilmişdir. Əgər istənilən $x \in X$ $(\forall x \in X)$ ədədinə qarşı yeganə y ədədini qarşı qoyan f qaydası verilmişsə, onda deyirlər ki, təyin oblastı X çoxluğu olan $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir.

Funksiyanın verilməsi üçün:

1) onun təyin oblastı və
2) təyin oblastına daxil olan hər bir x ədədinə qarşı qoyulan y ədədinin x ədədi vasitəsilə tapılması qaydası verilməlidir.

Funksiyanın verilməsinin əsas üsulları analitik, cədvəl və qrafik üsullar hesab edilir.

Funksiya analitik üsulla verildikdə hər bir x ədədinə qarşı qoyulan y ədədinin tapılması qaydası düstur və ya düsturlar vasitəsilə təyin edilir.

Funksiya cədvəl üsulu ilə verildikdə x -in və ona uyğun olan y -in qiymətləri cədvəl vasitəsilə verilir. Bu üsul vasitəsilə funksiyanın qiymətini sonlu sayda nöqtədə vermək olar. $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki dedikdə koordinat müstəvisində $(x, f(x))$ şəklində olan bütün nöqtələr çoxluğu başa düşülür. Funksiyanın qrafik üsulla verilməsi çox əlverişlidir: o funksiyanın xassələrini əyani təsvir etmək imkanını yaradır.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir. Bu funksiyanın təyin oblastını D_f ilə işarə edək. Onda $E_f = \{y | y = f(x),\ x \in D_f\}$ çoxluğu $y = f(x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu adlanır. Funksiyanın qrafikini qurmaq üçün onun ümumi xassələrini bilmək çox vacibdir. Funksiyanın ümumi xassələri dedikdə onun tək və ya cüt olması, artan və ya azalan oliması, dövri və ya dövri olmaması, məhdud və ya qeyri-məhdud olması və s. başa düşülür.

Natamam orta məktəbdə konkret funksiyanı aşağıdakı metodik sxem üzrə öyrənmək səmərəlidir:

1) öyrəniləcək funksiya ilə əlaqəsi olan məsələ və misalı araşdırmaq. Bu zaman şagirdləri bu funksiyanın öyrənilməsinin vacib olduğuna inandırmaq lazımdır;
2) funksiyanın tərifini vermək və onu əvvəl öyrənilmiş funksiyalardan fərqləndirən mühüm xassələrini göstərmək;
3) şagirdləri funksiyanın qrafiki ilə tanış etmək;
4) funksiyanın əsas xassələrini göstərmək (funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu, monotonluq aralıqlarını, işarəsinin sabit olduğu aralıqları, sıfırlarını, ekstremum nöqtələrini, dövriliyini, tək və ya cüt olmasını, məhdudluğunu,

kəsilməzliyini və s.); natamam orta məkiəbdə funksiyanın qeyd olunan xassələri yalnız onun qrafiki əsasında müəyyən edilir (bəzi xassələri analitik üsulla əsaslandırmaq mümkün olur);

5) funksiyanın xassələrinin tətbiqi ilə məsələ və misal həll etmək; bu mərhələ əsas anlayışların və nəzəri müddəaların möhkəmləndirilməsi və uyğun bacarıq və vərdişlərin formalaşması mərhələsi adlanır.

Natamam orta məktəbdə şagirdlər funksiyanın əsas xassələrini həm qrafik dildə, həm simvolik dildə, həm də nitq vasitəsi ilə ifadə etməyi öyrənirlər. Bu bacarıqlar tədricən formalaşır.

Məktəb riyaziyyat kursunda transendent funksiyaların öyrənilməsində bəzi metodik çətinliklər vardır.

Məktəb riyaziyyat kursunda öyrənilən ilk transendent funksiyalar triqonometrik funksiyalardır. Məktəb riyaziyyat kursunda triqonometrik funksiyaların öyrənilməsinin xüsusi əhəmiyyəti vardır. Ona görə ki, triqonometrik funksiyalar çox güclü hesablama vasitəsidir. Digər tərəfdən, triqonometrik funksiyalar nəzəriyyəsi funksiyaların tək və cütlüyünü, dövriliyini, məhdudluğunu, monotonluğunu və s. ümumi xassələrini əyani nümayiş etdirmək vasitəsidir. Triqonometrik funksiyalar əvvəlcə iti bucaqlar üçün VIII sinifdə həndəsə kursunda daxil edilir. Sonra bu anlayışlar IX sinifdə «Cəbr və analizin başlanğıcı» kursunda genişləndirilir. $x^2 + y^2 = 1$ çevrəsinin $M(x, y)$ nöqtəsinin absisini $M(x, y)$ nöqtəsinə uyğun olan bucağın kosinusu, ordinatını isə həmin nöqtəyə uyğun olan bucağın sinusu kimi daxil etmək, ədədi arqumentin triqonometrik funksiyalarını daxil etiəyin əlverişli üsullarından biridir. Şagirdlərin məktəb riyaziyyat kursunda triqonometrik funksiyalara qədər öyrəndiyi funksiyalar (məsələn, $y = kx + b,\ y = \frac{k}{x},\ y = x^2$ və s.) elə analitik ifadə ilə verilirdi ki, bu ifadələr sərbəst dəyişən üzərində aparılan cəbri əməllərin yerinə yetirilməsi ardıcıllığını göstərirdi. Triqonometrik funksiyaların analitik ifadələri isə bu ardıcıllığı göstərmir. Orta məktəb riyaziyyat kursunda bunun ciddi əsaslandırılması mümkün olmadığından müəllim şagirdlərə triqonometrik funksiyaların qiymətlərini istənilən dəqiqliklə hesablamağın mümkün olduğunu deməlidir.

Bəzi təbiət hadisələrini cəbri funksiyaların köməyi ilə təsvir etmək olmur. Məsələn, radioaktiv maddənin parçalanması, atmos-fer prosesləri, bakteriyaların bölünməsi və s. belə hadisələrdəndir. Bu hadisələri üstlü funksiyaların vasitəsi ilə istənilən dəqiqliklə təsvir etmək olur. Ona görə də məktəb riyaziyyat kursunda loqarifmik və üstlü funksiyaların öyrənilməsi vacibdir. Ümumiyyətlə, məktəb riyaziyyat kursu üstlü və loqarifmik funksiyalarsız elmi-praktik əhəmiyyətini itirərdi.

$y = a^x$ funksiyasının xassələrini öyrənərkən mənfi kəsr üstlü qüvvətlərin xassələrinin təkrar etmək lazımdır. $0^{-\frac{1}{2}}$, $(-2)^{\frac{3}{8}}$ və s. ifadələrinin mənasız olduğunu xüsusi qeyd etmək lazımdır.

Məktəb riyaziyyat kursunda üstlü funksiya anlayışı həqiqi ədədlər çoxluğuna genişləndirildikdə $a^x (a > 0)$ ifadəsinin x-in irrasional qiymətlərində varlığı isbatsız qəbul edilir. Məktəb riyaziyyat kursunda tərs funksiya anlayışı üstlü funksiya anlayışından əvvəl daxil edildiyindən loqarifmik funksiya anlayışını daxil etmək elmi-metodik cəhətdən asanlaşır.

Elementar funksiyaların öyrənilməsi prosesində şagirdlərin qrafik dili mənimsəməsinə nail olmaq çox vacibdir. Məlumdur ki, funksiya anlayışı ilə tanışlıq mərhələsində şagirdlər verilən funksiyanın qrafikini onun sonlu sayda nöqtələrinə görə qururlar. Bu mərhələdə onlara izah etmək lazımdır ki, funksiyaların tam qrafikini bu qayda ilə qurmaq olmaz; funksiyaların qrafikini qurmaq üçün onların ümumi xassələrini bilmək lazımdır.

Eyni sinifdən olan funksiyaların qrafiklərinin qurulmasında həndəsi çevirmələrdən (paralel köçürmə, oxa görə simmetriya, mərkəzi simmetriya və s.) istifadə etmək də səmərəlidir.

Yuxarı siniflərdə qrafiklərin qurulmasında törəməni tətbiq etməyi öyrənmək şagirdlərin qrafik qurmaq imkanlarını genişləndirir. Bu imkanlardan maksimum istifadə etmək üçün müəllim təlimdə şagirdlərin qrafik bilik və bacarıqlarını inkişaf etdirməyə xidmət edən çalışmalara geniş yer verməlidir.

§3. Tənlik və bərabərsizliklərin öyrənilməsi metodikası

Tənlik və bərabərsizliklərin öyrənilməsinə həsr olunan tədris materialları məktəb riyaziyyat kursunun əhəmiyyətli hissəsini təşkil edir. Bölmənin əhəmiyyətinə və genişliyinə görə müasir təlim praktikasında onun öyrənilməsində funksional xəttə üstünlük verilir. Tənlik anlayışı ən mühüm riyazi anlayışlardan biridir. Tənliyə həm ciddi, həm də şagirdlər tərəfindən anlanan şəkildə tərif vermək çətindir. Bəzi müəlliflər tənliyə onu eyniliklə müqayisə etməklə tərif verir.

Tərif. Dəyişənlərdən asılı olan bərabərlik onların bütün mümkün qiymətlərində doğru ədədi bərabərliyə çevrilirsə, onda belə bərabərlik eynilik adlanır. Əks halda belə bərabərlik tənlik adlanır.

Tənlik anlayışı daxil edilərkən «tənliyin kökü (həlli)», «tənliyi həll etmək», «eynigüclü tənliklər» və s. anlayışlar da daxil edilməlidir.

Tənlik, bərabərsizlik və onlardan təşkil olunmuş sistemləri həll edərkən müəyyən çevirmələrdən istifadə olunur. Belə çevirmələri aşağıdakı növlərə ayırmaq olar:

1) tənliyin (bərabərsizliyin) bir tərəfinin çevrilməsi;
2) tənliyin (bərabərsizliyin) hər iki tərəfinin çevrilməsi;
3) məntiqi quruluşun çevrilməsi.

Birinci növ çevirmədən həll edilən tənliyin (bərabərsizliyin) bir tərəfini çevirmək lazım gəldikdə istifadə olunur. Məsələn,

$$\cos x \cdot tgx = 1$$

tənliyini həll etdikdə onu $\sin x = 1$ şəklində yazmaq olar. Bu zaman verilən tənliklə çevirmədən sonra alınan tənliyin təyin oblastları fərqli olduğundan onlar eynigüclü olmur.

Qeyd edək ki, kəsr-rasional tənliklərin həlli zamanı birinci növ çevirmədən istifadə etdikdə əksər hallarda eynigüclü olmayan tənliklər alınır. Lakin tam tənliklərin həllində birinci növ çevirmədən istifadə etdikdə eynigüclü tənliklər alınır.

Birinci növdən olan çevirmələrə aşağıdakıları aid etmək olar: mötərizələrin açılmalı, oxşar hədlərin islahı və s.

İkinci növ çevirmələrin əsasını bərabərlik və bərabərsizlik münasibətlərinin xassələri təşkil edir. Belə çevirmələrə aşağıdakı çevirmələr aid edilir:

1) tənliyin hər iki tərəfinə eyni ifadənin əlavə edilməsi;
2) tənliyin hər iki tərəfini eyni ifadəyə vurmaq (və ya bölmək);
3) bərabərsizliyin hər iki tərəfini yalnız müsbət qiymətlər alan ifadəyə vurmaq və bölmək;
4) bərabərsizliyin hər iki tərəfini yalnız mənfi qiymətlər alan ifadəyə vurmaq və bərabərsizlik işarəsini əksi olan bərabərsizlik işarəsi ilə əvəz etmək;
5) $a(x) = b(x)$ tənliyindən $f(a(x)) = f(b(x))$ tənliyinə keçmək (burada f - müəyyən funksiyadır);
6) $a > b$ bərabərsizliyindən $f(a) > f(b)$ bərabərsizliyinə keçmək (burada f artan funksiyadır);
7) $a < b$ bərabərsizliyindən $f(a) < f(b)$ bərabərsizliyinə keçmək (burada f azalan funksiyadır) və s.

Tənliyin (bərabərsizliyin) məntiqi quruluşu dedikdə biz, ona daxil olan daha sadə tənliklərin (bərabərsizliklərin) öz aralarında məntiqi bağlayıcılar (konyuksiya, dizyunksiya və s.) vasitəsilə əlaqələndirilməsi üsullarını başa düşəcəyik.

Üçüncü növ çevirmələrin aşağıdakı əsas növləri vardır:

1) məntiqi quruluşun hesabi çevirmələr vasitəsilə çevrilməsi;
2) məntiqi quruluşun məntiqi çevirmələr vasitəsilə çevrilməsi.

Məntiqi quruluşun hesabi çevirmələr vasitəsilə çevirmələrinə aşağıdakıları misal göstərmək olar:

a) $a \cdot b = 0$ tənliyini $a = 0$ və ya $b = 0$ tənliklər küllisi ilə əvəz etmək;

b) sistemə daxil olan tənlikləri tərəf-tərəfə toplamaqla (çıxmaqla, vurmaqla və bölməklə) yeni tənlik almaq və s.

Məntiqi quruluşun məntiqi çevirmələr vasitəsilə çevrilməsinə aşağıdakıları misal göstərmək olar:

a) tənliklər (bərabərsizliklər) sistemindən bir komponenti ayırmaq. Məsələn, $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$ tənliklər sistemini əvəzetmə üsulu ilə həll etdikdə tənliklərdən birindən istifadə etməklə bir dəyişəni o biri ilə əvəz edirlər;

b) dəyişənin əvəz olunması. Ən sadə halda, dəyişənin əvəzolunması $F(f(x)) = 0$ tənliyindən $\begin{cases} F(u) = 0, \\ f(x) = u \end{cases}$ sisteminə keçməkdir;

v) dəyişənin əvəzolunmasına əks olan çevirmə, yəni $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ sistemindən $F(x, f(x))$ =0 tənliyinə keçmək;

q) eynigüclülük və məntiqi nəticə çıxarmaq qaydaları əsasında aparılan çevirmələr. Məsələn, $2x + |x - 1| = 3$ tənliyini həll etmək üçün onu

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1, \\ 2x + x - 1 = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ 2x + 1 - x = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

кцллцсцилтявяз едирик

Deməli, tənlik və bərabərsizlikləri həll etmək üçün şagirdlər həm uyğun həll alqoritmlərini, həm də tapılan həlləri məntiqi əsaslandırmağı bilməlidir. Tənliyin (bərabərsizliyin) həlli prosesini məntiqi əsaslandırmanın aşağıdakı növləri vardır:

a) empirik əsaslandırma;

b) deduktiv əsaslandırma;

v) eynigüclülük və məntiqi nəticə çıxarmaq qaydalarından istifadə etməklə əsaslandırma.

Həll prosesin empirik əsaslandırılması əsasən xətti tənliklərin həlli zamanı tətbiq edilir.

Həll prosesinin deduktiv əsaslandırılması nisbətən çətin tənliklərin həlli zamanı tətbiq edilir. Məsələn, $f(x) = g(x)$ tənliyindən $f_1(x) = g_1(x)$ tənliyinə keçən zaman bu tənliklərin eynigüclü olmasını əsaslandırmaq lazım gəlir. Bu isə deduktiv mühakiməsiz mümkün deyil.

Eynigüclülük və məntiqi nəticə çıxarmaq qaydaları ilə əsaslandırma isə mürəkkəb tənlik və bərabərsizliklərin həlli zamanı aparılır. Belə əsaslandırma tənlik və bərabərsizliklərin ədədi sistemlərlə əlaqəsinə əsaslanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, tənlik və bərabərsizliklərin həlli prosesinin əsaslandırılmasını öyrənmək aparıcı məqsəd olmasa da təlimdə şüurlu mənimsəməyə xidmət edir.

Tənliklər və bərabərsizliklər bölməsinin öyrənilməsində əsasən aşağıdakı mərhələlər fərqləndirilir:

a) tənliklərin və bərabərsizliklərin əsas tiplərinin öyrənilməsi mərhələsi;

b) öyrənilən tənlik və bərabərsizliklər siniflərinin tədricən genişləndirilməsi mərhələsi;

v) tənlik və bərabərsizlikləri həll etmək və tapılan həllərin tədqiq olunması bacarıqlarının formalaşdırılması mərhələsi;

q) tənliklər və bərabərsizliklər bölməsi üzrə bilik və bacarıqların təkmilləşdirilməsi və ümumiləşdirilməsi mərhələsi.

Tənlik və bərabərsizliklərin ümumi həll metodlarını üç qrupa ayırmaq olar:

1) məntiqi metodlar;
2) hesablama metodları;
3) qrafik metodlar.

Tənlik və bərabərsizliklər məntiqi metodlarla həll edilərkən eynigüclülük və məntiqi nəticə çıxarma qaydalarını tətbiq etməklə verilən tənlikdən (və ya bərabərsizlikdən) onunla eynigüclü tənlik (və ya bərabərsizlik) alınır.

Tənlik və bərabərsizliklər hesablama metodları ilə həll edilərkən müxtəlif sadələşdirmələrdən istifadə olunur, tapılan həll tədqiq olunur və müxtəlif hesablamalar aparılır. Tənliklərin təqribi köklərinin tapılmasına aid tapşırıqların həlli prosesində hesablama metodlarının rolu xeyli artır.

Qrafik metodlarla əsasən birməchullu tənlik və bərabərsizliklər həll edilir. Mütləq qiymət işarəsi daxil olan tənlik və bərabərsizliklərin həllində də qrafik metodlardan istifadə olunur.

Bərabərsizliklərin öyrənilməsinin bir neçə xüsusiyyətini qeyd etmək lazımdır:

1) bərabərsizliklər nəzəriyyəsi tənliklər nəzəriyyəsinə nisbətən mürəkkəb olduğuna görə bərabərsizlikləri həll etmək bacarıqları sadə bərabərsizliklərin həlli prosesində formalaşdırılır;
2) məktəb riyaziyyat kursunda bərabərsizliklərin əksəriyyəti verilən bərabərsizlikdən uyğun tənliyə keçməklə həll edilir;
3) bərabərsizliklərin həllində əyani-qrafik vasitələr mühüm rol oynayır.

İrrasional tənliklər əsasən iki üsulla həll edilir:

1) verilən tənlikdən onun nəticəsinə keçməklə; bu zaman verilən tənliyin kökü bilavasitə yoxlamaqla müəyyən edilir;
2) verilən tənliyi eynigüclü sistemlə əvəz etməklə; məsələn,

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^{2n}, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}.$$

Transendent tənlik və bərabərsizliklərin həllinin öyrənilməsində uyğun eynilik çevirmələrinin formalaşdırılmasına xüsusi diqqət yetirilməlidir.

Məktəb riyaziyyat kursunda tənliklər və bərabərsizliklər nəzəriyyəsinin öyrənilməsi zamanı mətnli məsələlərin həlli üsulları da öyrənilir. Bu təbiidir. Çünki istənilən praktik məsələnin riyazi modeli tənliklər, bərabərsizliklər və onların müxtəlif sistemləri vasitəsilə qurulur.

Mətnli məsələlərin həlli prosesini aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

1) məsələnin mətninin təhlili mərhələsi;
2) həll üsulunun axtarılması və həll planının qurulması mərhələsi;
3) həll planının icrası mərhələsi;
4) tapılan həllin tədqiqi mərhələsi.

Məktəb riyaziyyat kursunda öyrənilən mətnli məsələləri şərti olaraq aşağıdakı tiplərə bölmək olar:

1) hərəkətə aid məsələlər;
2) işə aid məsələlər;
3) faizə (hissəyə) aid məsələlər;
4) qarışıq məsələlər.

§4. Eynilik çevirmələri və hesablamaların öyrənilməsi metodikası

Eynilik çevirmələri və hesablamalar məktəb riyaziyyat kursunun əhəmiyyətli bir hissəsini təşkil edir və bütün siniflərdə öyrənilir. Hesab əməllərinin xassələrinə əsaslanan eynilik çevirmələri ibtidai təhsil mərhələsində və V-VI siniflərdə öyrənilir. Mürəkkəb eynilik çevirmələri və hesablamalar əsasən VI-XI siniflərdə öyrənilir.

VII sinifdə eynilik, eynilik çevirməsi anlayışları daxil edilir: «Dəyişənlər daxil olan bərabərlik dəyişənlərin bütün mümkün qiymətlərində doğru ədədi bərabərliyə çevirilirsə, onda belə bərabərlik eynilik adlanır»; «ifadəni ona eynilik kimi bərabər olan ifadə ilə əvəz etmək eynilik çevirməsi adlanır». Eynilikləri iki sinfə ayırmaq olar. Birinci sinfə istənilən kommutativ qrupda doğru olan müxtəsər vurma düsturları və istənilən meydanda doğru olan $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} \quad (a \neq 0)$ eyniliyi aid edilir. İkinci sinfə isə hesab əməlləri ilə elementar funksiyaları (və ya onların müxtəlif superpozisiyalarını) bağlayan eyniliklər aid edilir.

Müxtəlif siniflərdən olan çevirmələrin öyrənilməsi metodları bir-birindən çox az fərqlənir.

Riyazi ifadələrin çevirmələrinin öyrənilməsi prosesini aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

1) cəbrin başlanğıcı mərhələsi;
2) konkret növdən olan çevrilmələri aparmaq bacarıqlarının formalaşdırılması mərhələsi;
3) çevirmə aparmaq bacarıqlarının sistemləşdirilməsi mərhələsi.

Birinci mərhələnin əsas məqsədi şagirdlərin sadə tənliklərin həllini, ifadələrin sadələşdirilməsini, hesablamaları tələb olunan surətdə aparmasına nail olmaqdır. İkinci mərhələnin əsas məqsədi konkret sinifdən olan eynilik çevirmələrinin xarakteristik xüsusiyyətlərinin mənimsənilməsinə və onları tətbiq etmək bacarıqlarının formalaşmasına nail olmaqdır. Üçüncü mərhələnin məqsədi isə şagirdlərə müxtəlif tədris tapşırıqlarını yerinə yetirmək üçün lazım olan çevirmələrin tam və güclü sistemini öyrətməkdir. Eynilik çevirmələrinin öyrənilməsində xüsusi tərtib olunmuş tapşırıqlar sistemi mühüm rol oynayır. Konkret sistemdəki tapşırıqlar bir eyniliyin öyrənilməsinə aid olur. Tapşırıqlar sistemdə çətinliklərin artmasına görə yerləşdirilir. Sistemdəki tapşırıqlar iki qrupa bölünür. Birinci qrupu öyrənilən eyniliyi sadə hallarda tətbiq etməyi tələb edən tapşırıqlar təşkil edir. İkinci qrupa isə öyrənilən eyniliyin müxtəlif situasiyalarda tətbiqini tələb edən tapşırıqlar aid edilir.

Yerinə yetirilmə üsuluna görə hesablamaları şifahi, yazılı və texniki vasitələrin tətbiqi ilə aparılan hesablamalara bölmək olar. Eynilik çevirmələrini isə şifahi və yazılı aparılan çevirmələrə bölmək olar.

Şifahi hesablamaların və çevirmələrin aparılması çox az vaxt tələb edir. Hesablama və ya çevirməni başlamazdan əvvəl aşağıdakıları aydınlaşdırmaq lazımdır:

1) hesablamanın (və ya çevirmənin) yerinə yetirilməsi ardıcıllığını;
2) şifahi aparılacaq hesablamanı (və ya çevirməni);
3) hesablamanı (və ya çevirməni) asanlaşdıran xassəni;
4) nəticəni yoxlamaq qaydasını və s.

Şagirdlərin hesablamaları yerinə yetirmək bacarıqları aşağıdakı əlamətlərlə xarakterizə olunur:

1) ədədi çoxluqlarda təyin olunmuş cəbri əməllərin xassələrini və həmin əməllərin yerinə yetirilməsi qaydalarını bilmək;
2) qoyulmuş məsələrin şərtinə görə verilən kəmiyyətlərin qiymətlərinin dəqiq və ya təqribi olduğunu təyin edə bilmək;
3) yazılı, şifahi və texniki vasitələrdən istifadə etməklə aparılan hesablamaları düzgün əlaqələndirə bilmək;
4) hesablamaları aparmaq üçün ən əlverişli üsulu seçə bilmək;
5) hesablamaları səhvsiz və sürətli apara bilmək;
6) hesablamaların nəticəsini ən əlverişli üsulla yoxlamağı bacarmaq;

7) hesablamalarda tətbiq edilən qaydaları əsaslandırmağı bacarmaq və s.

Qeyd edək ki, hesablamaları və çevrilmələri apara bilmək bacarıq və vərdişlərinin formalaşdırılması da təlimin təhsil, tərbiyə və inkişafetdirmə məqsədlərinin həyata keçirilməsinə xidmət edir.

Eynilik çevirmələrini də yerinə yetirilməsi formasına görə şifahi və yazılı çevirmələrə ayırmaq olur.

Hesablama (və ya eynilik çevirmələri) aparmaq bacarıq və vərdişlərinin formalaşdırılması prosesində şagirdləri aşağıdakı tələblərə əməl etməyə öyrətmək lazımdır:

1) əgər hesablamanı (eynilik çevirməsini) şifahi aparmaq mümkün deyilsə, onda onu yazılı aparmaq üçün optimal üsulun olub-olmadığını müəyyən etmək lazımdır;
2) hesablamanı (çevirməni) şifahi apardıqda cari nəticələri yadda saxlamaq çətin olduqda onları yazmaq lazımdır;
3) hesablamaların (və çevirmələrin) aparılması zamanı hərf və rəqəmləri səliqəli və aydın yazmaq lazımdır;
4) hesablamanı və ya çevirməni yoxladıqdan sonra onun nəticəsini doğru hesab etmək lazımdır və s.

§5. Riyazi analiz elementlərinin öyrənilməsi metodikası

I. Məktəb riyaziyyat kursunda riyazi analiz elementlərinin öyrənilməsi «ədədi ardıcıllıqlar» bölməsinin öyrənilməsi ilə başlanır. Bu bölmə IX sinifdə öyrənilir. Bu bölmənin öyrənilməsi zamanı ədədi ardıcıllıq, artan və ya azalan ədədi ardıcıllıq, məhdud ədədi ardıcıllıq, ardıcıllığın limiti və s. anlayışlar daxil edilir.

Ədədi ardıcıllığın tərifi daxil edilərkən çalışmaq lazımdır ki, şagird «sonsuz ədədi ardıcıllığı vermək hər bir natural n ədədinə yeganə a_n həqiqi ədədini qarşı qoymaq qaydasını göstərməkdir» təklifinin mahiyyətini mənimsəsin. Bu məqsədlə müxtəlif misallar göstərmək lazımdır. Ədədi ardıcıllıqları öyrənərkən həndəsi təsvirlərdən istifadə etmək çox əhəmiyyətlidir. Ədədi ardıcıllıq natural arqumentli funksiya olduğundan ədədi ardıcıllığın qrafikini çəkmək və bu qrafik əsasında ardıcıllığın ümumi xassələrini tədqiq etmək olar. Ədədi ardıcıllığın hədlərini ədəd oxu üzərində nöqtələrlə təsvir etmək olar.

Ədədi ardıcıllığın verilmə üsulları araşdırılan zaman şagirdlərin diqqətini aşağıdakı faktlara cəlb etmək lazımdır:

1) ədədi ardıcıllıq analitik üsulla verildikdə onun istənilən nömrəli həddini bilavasitə tapmaq olur. Lakin ədədi ardıcıllıq rekurrent üsulla verildikdə verilən nömrəli həddi tapmaq üçün bu ardıcıllığın bu həddən əvvəl gələn bütün hədlərini bilmək lazımdır;
2) rekurrent münasibət ədədi ardıcıllığı birqiymətli təyin etmir. Belə ədədi ardıcıllığı birqiymətli təyin etmək üçün onun müəyyən sayda ilk həddi verilməlidir.

Ardıcıllığın monotonluğu və məhdudluğu anlayışlarının formalaşmasına ciddi diqqət yetirmək lazımdır. Təkcə ona görə yox ki, bu anlayışlar riyazi analizin fundamental anlayışlarıdır, həm də ona görə ki, bu anlayışların öyrənilməsi müəyyən didaktik xüsusiyyətlərə malikdir. Monotonluq və məhdudluq anlayışları analitik tədqiqat metodlarını tətbiq etmək üçün çox da çətin olmayan tədris materialıdır. Bu anlayışların öyrənilməsində də ardıcıllığın qrafikindən istifadə etmək əlverişlidir.

Ardıcıllığın limiti anlayışı şagirdlərin çətin mənimsədiyi anlayışlardan biridir. Bunu aşağıdakılarla izah etmək olar:

1) limit anlayışı təbiətcə mürəkkəb olan sonsuzluq anlayışı ilə baglıdır. Limit anlayışının tərifində mütləq qiymət işarəsi daxil olan bərabərsizlikdən istifadə olunur;
2) bu mövzunun öyrənilməsi üçün nəzərdə tutulan tədris vaxtı azdır;
3) bu mövzu IX sinif riyaziyyat kursunun digər mövzularından təcrid olunmuşdur;
4) mövzunun öyrənilməsi metodikası kifayət qədər mükəmməl deyildir və s.

Məktəb riyaziyyat kursunda ardıcıllığın limiti anlayışı aşağıdakı kimi daxil edilir.

Tutaq ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N natural ədədi var ki, nömrəsi N-dən böyük olan hər bir x_n həddi üçün

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda a ədədinə $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir və

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

kimi işarə edilir. Ardıcıllığın limitinin tərifi daxil edildikdən sonra şagirdlərin diqqətini aşağıdakı iki momentə cəlb etmək lazımdır:

1) N nömrəsi ε -nun qiymətindən asılıdır;

2) əgər $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ isə, onda $|x_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyi $n > N$ nömrəli bütün hədlər üçün ödənməlidir.

Bunları konkret misal üzərində izah etmək daha yaxşı olar. Məsələn, isbat edək ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

$\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001$ qiymətləri üçün

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

şərtini ödəyən N nömrəsini tapaq, alınan nəticələri cədvəl şəklində yazaq:

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6n+2-6n+3}{2(2n-1)}\right| = \frac{5}{2(2n-1)} < \varepsilon .$$

Sonuncu bərabərsizlikdən $n > \frac{2{,}5+\varepsilon}{2\varepsilon}$. Deməli, $N = \left[\frac{2{,}5+\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$ olur.

ε ədədinin verilən qiymətləri üçün aşağıdakı cədvəli alarıq:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
N	13	125	1250	12500

Cəm, hasil və kəsrin limitləri haqqında təkliflərin ciddi isbatını vermək yaxşı olardı. Lakin bu təkliflərin isbatını şagirdlərdən tələb etməmək olar.

II. Funksiyanın nöqtədə limiti və funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi anlayışları bir qədər mücərrəd anlayışlardır. Mövcud riyaziyyat proqramına görə bu anlayışların elmi cəhətdən ciddi əsaslandırılmış şəkildə öyrənilməsi XI sinifdə nəzərdə tutulur.

Funksiyanın nöqtədə limiti anlayışını daxil etməzdən əvvəl, bu anlayışla sıx əlaqəsi olan bir neçə sadə misalı araşdıraq. Məsələn, $y = 2x - 3$ funksiyasının $x = 2$ nöqtəsinin $(2-\varepsilon; 2+\varepsilon)$ ətrafında olan bir neçə nöqtədə qiymətlərini hesablasaq, aşağıdakı cədvəli alarıq:

x	1,9	1,99	2	2,1	2,01	2,001
$f(x)$	0,8	0,98	1	1,2	1,02	1,002

Cədvəldən görünür ki, x 2-yə yaxın qiymətlər aldıqda $f(x)$-in qiymətləri 1-ə yaxın olur. Bu misaldan sonra $x = 2$ nöqtəsində kəsilən $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ funksiyasının bu nöqtənin $(2-\varepsilon; 2+\varepsilon)$ ətrafından olan bir neçə nöqtədə qiymətlərini hesablayaq. Bu qiymətləri cədvəl şəklində yazaq:

x	1,9	1,99	1,999	2	2,1	2,01	2,001
$f(x)$	3,9	3,99	3,999	funksiya təyin	4,001	4,01	4,1

				olunmur			

Cədvəldən görünür ki, x -in qiymətləri 2-dən az fərqləndikdə $f(x)$ -in qiymətləri də 4-dən az fərqlənir; funksiya $x=2$ nöqtəsində təyin olunmur.

Belə misallar araşdırıldıqdan sonra funksiyanın nöqtədə limiti anlayışını daxil etmək olar. Bu zaman xüsusi qeyd etmək lazımdır ki, funksiyanın limiti hesablanan nöqtə funksiyanın təyin oblastına daxil olmayada bilər. Funksiyanın nöqtədə limtinin tərifi XI sinif dərsliyində aşağıdakı kimi verilir.

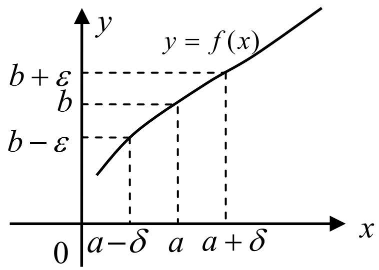
Tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $\delta>0$ ədədi vardır ki, $0<|x-a|<\delta$ şərtini ödəyən bütün x -lər üçün $|f(x)-b|<\varepsilon$ olur. Onda b ədədinə $y=f(x)$ funksiyasının $x=a$ nöqtəsində limiti deyilir və $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ kimi işarə olunur.

Göründüyü kimi tərifə mütləq qiymət işarəsi daxil olan bərabərsizliklər daxildir. Ona görə də tərifi verməzdən əvvəl şagirdlərin mütləq qiymət işarəsi daxil olan bərabərsizliklər haqqında biliklərini sistemləşdirmək lazımdır. Bunu aşağıdakı çalışmalar sisteminə oxşar sistemi həll etməklə nail olmaq olar:

1) «ədəd oxu üzərində 3 və 7 ədədlərinə uyğun olan nöqtələr arasındakı məsafə 4-ə bərabərdir» təklifini mütləq qiymət işarəsindən istifadə etməklə yazmalı;

2) «ədəd oxu üzərində x və (-3) ədədlərinə uyğun olan nöqtələr arasındakı məsafə 1-ə bərabərdir» təklifini mütləq qiymət işarəsindən istifadə etməklə yazmalı;
3) «ədəd oxu üzərində x və a ədədlərinə uyğun olan nöqtələr arasındakı məsafə δ-ya bərabərdir» təklifini mütləq qiymət işarəsindən istifadə etməklə yazmalı;
4) «ədəd oxu üzərində x və 3 ədədlərinə uyğun olan nöqtələr arasındakı məsafə 2-dən kiçikdir» təklifini mütləq qiymət işarəsindən istifadə etməklə yazmalı;
5) «ədəd oxu üzərində x və a ədədlərinə uyğun olan nöqtələr arasındakı məsafə δ-dan kiçikdir» təklifini mütləq qiymət işarəsindən istifadə etməklə yazmalı.

Funksiyanın nöqtədə limiti anlayışının mənimsənilməsi prosesində əyani təsvirlər (qrafiklər, cədvəllər) mühüm rol oynayırlar.



Cəmin, hasilin və nisbətin nöqtədə limitləri haqqında teoremləri isbat etməzdən əvvəl, iki funksiyanın cəminin, hasilinin və nisbətinin mahiyyətini açmaq lazımdır. Məsələn, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının cəmi elə $F(x)$ funksiyasıdır ki, $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ üçün

$F(x) = f(x) + g(x)$ olur. Şagirdlərin diqqətini bir də ona cəlb etmək lazımdır ki, bu teoremlərin şərtlərində $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının $x = a$ nöqtəsində sonlu limitlərinin varlığı fərz olunur.

III. funksiyanın nöqtədə limiti anlayışı öyrənilərkən şagirdlərdə funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi anlayışı haqqında ilkin təsəvvürlər yaradıla bilər. Bu məqsədlə aşağıdakılara oxşar çalışmalardan istifadə oluna bilər:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{яэяр } 0 < x < 4, \\ x - 2, & \text{яэяр } x \geq 4 \end{cases}$$

isə $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ -i hesablayın;

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{яэяр } x \neq 2, \\ 1, & \text{яэяр } x = 2 \end{cases}$$

isə $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ -i hesablayın;

$$c)\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{яэяр } x > 0, \\ 0, & \text{яэяр } x = 0, \\ -1, & \text{яэяр } x < 0 \end{cases}$$

isə $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ və $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ limitlərini hesablayın.

Göstərilən misallardakı funksiyalardan birinin nöqtədəki limiti və qiyməti bərabərdir:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2 \quad \text{və} \quad f(4) = 4 - 2 = 2\ .$$

İkinci misaldakı funksiyanın nöqtədə limiti ilə nöqtədəki qiyməti bərabər deyildir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4 \quad \text{və} \qquad f(2)=1\,.$$

Üçüncü misaldakı funksiyanın isə tələb olunan nöqtədə limiti yoxdur.

Şagirdlərin diqqətini bu faktlara cəlb etdikdən sonra funksi-yanın nöqtədə kəsilməzliyi anlayışının tərifini vermək olar: tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası $(a;b)$ aralığında təyin olunmuşdur və $x_0\in(a;b)$. Əgər

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

olarsa, onda $f(x)$ $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməz funksiya adlanır.

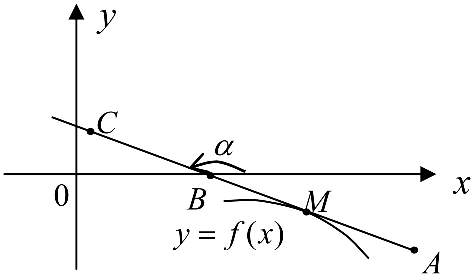
İki funksiyanın cəminin, hasilinin və nisbətinin nöqtədə kəsilməzliyi haqqında olan teoremlərin isbatını müstəqil iş kimi şagirdlərə həvalə etmək olar. Bu təklifləri isbat etmək üçün şagirdlər funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin tərifini və cəm, hasil və nisbətin limitlərinin hesablanması qaydalarını tətbiq etməyi bacarmalıdır.

IV. Funksiyanın nöqtədə törəməsi anlayışını daxil etməzdən əvvəl müəllim şagirdlərə diferensial hesabi nəzəriyyəsinin əsas ideyasını göstərməlidir: «diferensial hesabı» nəzəriyyəsinin əsas ideyası funksiyanı nöqtənin kafi qədər kiçik ətrafında xətti funksiya kimi təsəvvür etməkdir. Deməli, törəmə anlayışını daxil etməzdən əvvəl xətti funksiyaları dərindən öyrənmək lazımdır. Törəmənin tərifində arqumentin və funksiyanın dəyişməsi anlayışlarından istifadə olunduğundan şağirdlərdə bu anlayışlar haqqında aydın təsəvvürlər formalaşdırılmalıdır. Məlumdur ki, riyazi analizin elm sahəsi kimi formalaşmasında əyriyə toxunanın çəkilməsinin mümkünlüyünün araşdırılması mühüm rol oynamışdır. Məktəb riyaziyyat kursunda toxunan anlayışı törəmə anlayışı haqqında həndəsi təsəvvürün formalaşmasında əsas rol oynayır. Ona görə də törəmə anlayışını daxil etməzdən əvvəl şağirdlərdə toxunan haqqında aydın təsəvvür formalaşmalıdır.

Törəmə anlayışı daxil edilənə gədər şağirdlər xətti funksiyanın tərifini, onun qrafikini qurmağı və «ordinat oxuna paralel olmayan hər bir düz xətt müəyyən xətti funksiyanın qrafikidir» təklifini bilməlidir. Şağirdlərin düz xətlə absis oxunun müsbət istiqaməti arasındakı bucaq haqqında aydın təsəvvürünün olması çox vacibdir. Bu bucaq toxunanın meyl bucağı adlanır. Toxunanın meyl bucağını üç hal üçün dəqiqləşdirmək lazımdır:

1) əgər toxunan absis oxuna paralel isə, onda bu bucaq 0^0–ə bərabər olur;
2) əgər toxunan absis oxuna perpendikulyar isə, onda bu bucaq 90^0–ə bərabər olur;
3) əgər toxunan koordinat oxlarına paralel deyildirsə, onda bu bucaq toxunanla absis oxunun müsbət istiqaməti arasında qalan bucaqdır.

Deməli, toxunanın α meyl bucağı üçün $0^0 \le \alpha < 180^0$ münasibəti doğrudur. Qeyd edək ki, funksiyanın qrafiki aşağı yarımmüstəvidə olduqda verilmiş nöqtədə bu qrafikə çəkilən toxunanın meyl bucağını təyin etməkdə şağirdlər çətinlik çəkirlər. Bəzi şagirdlər aşağıdakı şəkildə təsvir olunan funksiya qrafikinin M nöqtəsində ona çəkilən toxunanın meyl bucağı kimi səhvən $\angle ABX$ -i götürürlər.



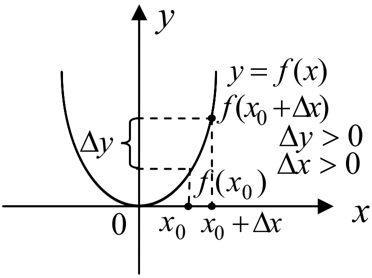
Əslində isə bu bucaq $\angle XBC$ -dir.

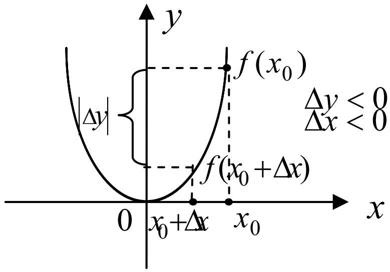
Arqumentin dəyişməsini Δx, funksiyanın dəyişməsini isə Δy $(\Delta f(x))$ işarə etmək əlverişlidir. Şagirdlərə izah etmək lazımdır ki, Δ simvolunu dəyişənlərdən ayırmaq olmaz. Bu stmvoldan istifadə olunan əsas anlayışlar aşağıdakılardır:

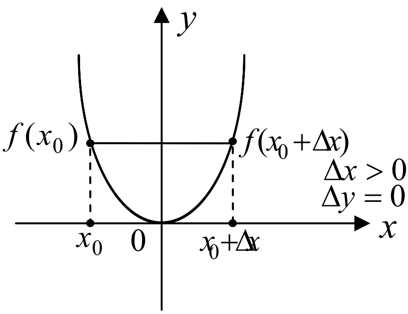
$$x - x_0 = \Delta x,$$

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0).$$

Bu kəmiyyətlərin mahiyyətini açmaq üçün qrafikdən istifadə etmək əlverişlidir:







Şagirdlər konkret funksiyanın verilmiş nöqtədə dəyişməsini tapmağı bacarmalıdır. Bu məqsədlə aşağıdakılara oxşar çalışmaları həll etmək əlverişli olar.

Misal 1. $y = 3x^2 - 2x + 1$ funksiyası üçün $x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}2$ olduqda Δy dəyişməsini tapmalı.

Həlli: $f(1) = 2$,

$f(1{,}2) = 3 \cdot 1{,}2^2 - 2 \cdot 1{,}2 + 1 = 3{,}08$ olduğundan

$\Delta y = 3{,}08 - 2 = 1{,}08$ olur.

Misal 2. $y = ax^2 + bx + c$ funksiyası üçün $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbətini tapmalı.

Həlli: $\Delta y = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) =$

$$= (2ax+b)\Delta x + a\cdot(\Delta x)^2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a\cdot\Delta x.$$

Müxtəlif funksiyalar üçün $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbətini hesabladıqdan sonra onun aşağıdakı xassələrini qeyd etmək lazımdır:

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbəti Δx -in funksiyasıdır;

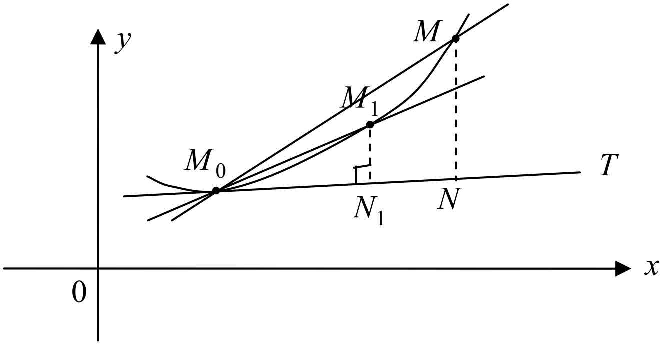
2) xətti funksiya üçün $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbəti sabitdir;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbəti istənilən funksiyanın $[x; x+\Delta x]$ parçasında dəyişməsinin orta sürətidir.

Funksiya qrafikinə toxunan anlayışı daxil edilənə qədər şagirdlər «toxunan» terminini yalnız çevrəyə toxunan kimi başa düşürlər. Toxunan anlayışını ümumiləşdirmək üçün aşağıdakı misallarla baxaq.

Əyri və ona toxunan düz xətt arasındakı əlaqələr içərisində ən mühüm əlaqə toxunma nöqtəsinin yaxın ətrafında toxunan düz xəttin əyriyə necə «yaxın olması»dır. Bu əlaqəni dəqiqləşdirək. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin $M_0(x_0, f(x_0))$ nöqtəsindən çıxan MM_0 və M_1M_0 vətərləri verilmişdir. M_0T isə əyriyə M_0

nöqtəsində çəkilən toxunandır. $MN \perp M_0T$ və $M_1N_1 \perp M_0T$ parçaları çəkək.



$\angle MM_0T = \varphi$ və $\angle M_1M_0T = \varphi_1$ işarə edək. Şəkildən göründüyü kimi M nöqtəsi qrafik üzrə M_0 nöqtəsinə yaxınlaşdıqda həm $\sin\varphi = \dfrac{MN}{MM_0}$ nisbəti, həm də φ bucağı sıfra yaxınlaşır. Bu hazırlıqdan sonra toxunana toxunma nöqtəsində keçən vətərlərin limit vəziyyəti kimi tərif vermək olar.

Kafi qədər hazırlıq işləri apardıqdan sonra törəmə anlayışını daxil etmək olar.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $(a;b)$ intervalında təyin olunmuş funksiyadır və $x_0 \in (a;b)$. Əgər sonlu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ limiti varsa, onda bu limitə $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi deyilir və $f'(x_0)$ kimi işarə olunur:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

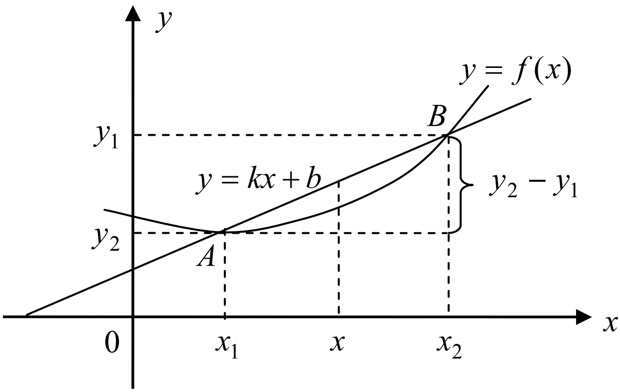
Diferensial anlayışı da riyazi analizin mühüm anlayışlarındandır. Bu anlayışın mənimsənilməsi «cəbr və analizin başlanğıcı» kursunun digər mövzularının mənimsənilməsini asanlaşdırır (törəmənin təqribi hesablamalara tətbiqi mövzusu bina misal göstərilə bilər).

Funksiyanın diferensialını törəmənin tərifinə görə tapmaq olar: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ olduğundan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Onda $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Deməli, funksiyanın dəyişməsi iki komponentin cəmindən ibarət olur: $y' \cdot \Delta x$ və $\alpha \cdot \Delta x$. Δx-ə nəzərən xətti komponent olan $y' \cdot \Delta x$ kəmiyyəti diferensial adlanır və dy ilə işarə edilir:

$$dy = y' \cdot \Delta x .$$

Xüsusi halda, $y = x$ götürüb, x-in diferensialını tapaq: $y' = 1$ və $dx = 1$. $\Delta x = \Delta x$. Deməli, $dx = \Delta x$. Buradan $dy = y' \cdot dx$ alırıq.

Tutaq ki, $f(x)$ $[x_1; x_2]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır. x_1 və x_2 nöqtələrində funksiyanın qiymətini bilmək və bu parçanın daxili nöqtəsində funksiyanın təqribi qiymətini hesablamaq olur. $[x_1; x_2]$ parçasında $y = f(x)$-in qrafiki $(x_1, f(x_1))$ və $(x_2, f(x_2))$ nöqtələrindən keçən düz xətt parçası ilə əvəz olunur.



AB vətərinin bucaq əmsalı $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$-a bərabərdir. $y = kx + b$ xətti funksiyasının Δx-ə uyğun dəyişməsi k bucaq əmsalı ilə mütənasib olduğundan $\Delta y = k \cdot \Delta x$ yazmaq olar. Ona görə də $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \Delta x$ olur. Buradan $f(x)$-in x nöqtəsində təqribi qiymətini hesablamaq üçün

$$y \approx y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

düsturunu alarıq.

Funksiyanın tədqiq olunmasında, törəmənin tətbiq edilməsinin öyrənilməsi prosesində bəzi metodik çətinliklər meydana çıxır: 1) mövzunun məntiqi quruluşunun mürəkkəbliyi; 2) bəzi teoremlərin isbatsız verilməsi və s. Ona görə bu mövzunun öyrənilməsi prosesində uyğun çalışmalar sisteminin tərtib olunması çox mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Məsələn, Ferma teoremi funksiyanın ekstremum nöqtəsinin varlığı üçün zəruri şərti verir. Bunu $y = x^3$ funksiyasının $[-a; a]$ parçasında ekstremum nöqtəsinin olmadığını göstərməklə izah etmək olar. $y = x^3$ funksiyasının $[-a; a]$ parçasında $x = 0$ böhran nöqtəsi olsa da, o bu parçada hər yerdə artır.

Şagirdlərin diqqətini aşağıdakı fakta da cəlb etmək lazımdır: funksiyanın törəməsinin olmadığı nöqtə ekstremum nöqtəsi ola bilər. Bu məqsədlə $y = |x|$ funksiyasını misal göstərmək olar.

V. İbtidai funksiya anlayışı törəmə anlayışına nisbətən daha mürəkkəb anlayışdır. Ona görə də «ibtidai funksiya və inteqral» bölməsinin öyrənilməsi prosesində metodik cəhətdən öz həllini gözləyən problemlər az deyil. Mövcud dərsliklərdə ibtidai funksiyaya müxtəlif təriflər verilir. Onlardan ikisinə baxaq:

1) əgər verilən parçada təyin olunmuş $F(x)$ funksiyası bu parçanın hər bir nöqtəsində

$$F'(x) = f(x)$$

şərtini ödəyərsə, onda $F(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyası üçün ibtidai funksiya adlanır;

2) əgər verilən parçada təyin olunmuş kəsilməz $F(x)$ funksiyası bu parçanın hər bir daxili nöqtəsində

$$F'(x) = f(x)$$

şərtini ödəyərsə, onda $F(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyası üçün ibtidai funksiya adlanır.

Göründüyü kimi, birinci tərifdə $F(x)$ funksiyası üzərinə daha ağır şərt qoyulur: $F(x)$ funksiyası parçanın uc nöqtələrində də törəməyə malik olmalıdır. Dərsliklərin müəlliflərinin əksəriyyəti «ibtidai funksiya və inteqral» bölməsinin öyrənilməsi üçün birinci tərifi əlverişli hesab edirlər.

İbtidai funksiya anlayışını daxil etməzdən əvvəl müəyyən hazırlıq işi görülməlidir. Məsələn, elə cədvəl tərtib etmək olar ki, orada müxtəlif funksiyalar və hər funksiyanın qarşısında isə onun törəməsi yazılsın. Sonra şagirdlərə izah etmək olar ki, törəməsi verilən funksiyanın özünü tapmaq olur. Bunu etməyə imkan verən əməl isə inteqrallama adlanır.

İbtidai funksiya anlayışı daxil edildikdən sonra onun 3 əsas xassəsi öyrənilir:

1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

2) $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$;

3) $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} \cdot \int f(x)dx$.

İnteqralın tətbiqi ilə əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablayarkən aşağıdakı təklifdən istifadə olunur.

Tutaq ki, $f(x)$ $[a;b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır və $\forall x \in [a;b]$ üçün $f(x) \geq 0$. Onda soldan $x = a$, sağdan $x=b$, aşağıdan $y=0$ və yuxarıdan $y=f(x)$ əyriləri ilə hüdudlanmış əyrixətli trapesiyanın sahəsi

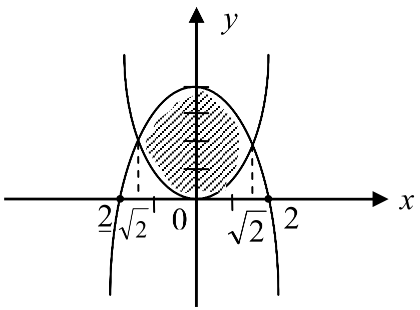
$$S=F(b)-F(a)$$

düsturu ilə hesablana bilər, burada $F(x)=\int f(x)dx$ -dir.

İnteqralın tətbiqi ilə fiqurların sahələrinin hesablanmasına aid çalışmaların aşağıdakı növləri fərqləndirilir:

1) çalışmada $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları verilir, inteqrallama sərhədləri isə çalışmanın şərtlərinə əsasən təyin edilir.

Misal. $y=x^2$ və $y=-x^2+4$ qrafikləri ilə hüdudlanan fiqurun sahəsini tapmalı.



Bu qrafiklərin kəsişmə nöqtələrini tapaq:

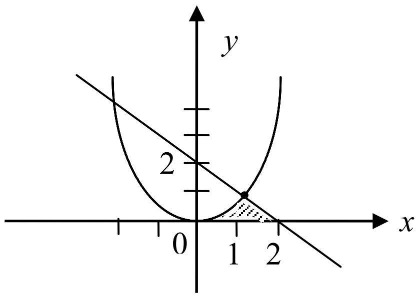
$$x^2=-x^2+4; \quad x=\pm\sqrt{2}.$$

Onda $S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(-x^2+4-x^2)dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(4-2x^2)dx$ olur.

2) Çalışmada qrafikləri ortaq nöqtəyə malik olan iki funksiya verilir. Çalışmanı həll etmək üçüq əyrixətli trapesiyanı iki hissəyə bölmək lazım gəlir.

Misal. $y = x^2, y = 2 - x$ və $y = 0$ qrafikləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapmalı.

Bu qrafiklərlə hüdudlanan fiqurun sahəsini tapmaq üçün onu



iki hissəyə bölmək lazımdır. Onda tələb olunan sahəni

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx$$

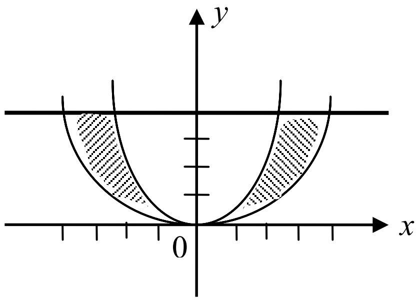
kimi hesablamaq olar.

3) Çalışmada qrafikləri ortaq nöqtəyə malik olan iki funksiya verilir. Tələb olunan fiqurun sahəsini tapmaq üçün iki sahənin fərqini tapmaq lazım gəlir.

Misal. $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ və $y = 4$ qrafikləri ilə hüdudlanan fiqurun sahəsini tapmalı.

$y = x^2$ və $y = 4$ qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absisləri

$x = \pm 2$ olduğundan $S_1 = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx$ olur.



$y=\frac{1}{4}x^2$ və $y=4$ qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absisləri $x=\pm 4$ olduğundan, $S_2=\int\limits_{-4}^{4}\left(4-\frac{1}{4}x^2\right)dx$ olur. Onda tələb olunan sahə $S=S_2-S_1$ olur.

Məktəb riyaziyyat kursunda müəyyən inteqral anlayışı aşağıdakı kimi daxil edilir: $[a;b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz $f(x)$ funksiyasının $F(x)$ ibtidai funksiyasının $[a;b]$ parçasındakı dəyişməsi $f(x)$-in $[a;b]$-də müəyyən inteqralı adlanır və $\int\limits_a^b f(x)dx$ kimi işarə olunur.

Tərifə görə

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

olur.

Müəyyən inteqral anlayışını inteqral cəmlərinin limiti kimi də daxil etmək olar.

Fərz edək ki, $f(x)$ $[a;b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır. $[a;b]$ parçasını n sayda hissəyə bölək:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,...,n)$ işarə edək. Δx_i fərqlərinin ən böyük olanını λ ilə işarə edək: $\lambda = \max \Delta x_i$. Hər bir $[x_i, x_{i+1}]$ parçasından ixtiyari c_i nöqtəsi götürək: $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,1,...,n-1)$.

Aşağıdakı kimi təyin olunan cəmlər ardıcıllığına baxaq:

$$S_n = f(c_0)(x_1 - x_0) + f(c_1)(x_2 - x_1) + ... +$$

$$+ f(c_i)(x_{i+1} - x_i) + ... + f(c_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Tutaq ki, $[a;b]$ parçasının bölünmə qaydasından və c_i $(i = 0,1,...,n-1)$ nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olur ki, $0 < \lambda < \delta$ olduqda $|J - S_n| < \varepsilon$ olur. Onda J ədədinə $f(x)$ funksiyasının $[a;b]$ parçasında müəyyən inteqralı deyilir və

$$\int_a^b f(x)dx = J, \quad \lim_{\lambda \to 0} S_n = J.$$

Mövcud riyaziyyat proqramına görə sadə diferensial tənliklərin öyrənilməsi «loqarifmik və üstlü funksiyalar» bölməsinin öyrənilməsi zamanı nəzərdə tutulur. Diferensial tənlik anlayışı daxil edilməzdən əvvəl fizika, kimya, biologiya, iqtisadiyyat və sosiologiya fənlərindən həlli $y' = ky$ tənliyinin həllinə gətirilən məsələlər araşdırılır. «Triqonometrik funksiyalar» bölməsinin öyrənilməsi zamanı isə, həlli $y'' = -k^2 \cdot y$ tənliyinin həllinə gətirilən məsələlər araşdırılır.

Diferensial tənlik anlayışını daxil edərkən şagirdlərə göstərmək lazımdır ki, praktik məsələlərin həllı modelini təşkil edən tənliyə və ya tənliklər sisteminə həm məchul funksiya, həm də onun törəməsi daxil olur. Belə tənliklər diferensial tənlik adlanır. Sonra aşağıdakı məsələyə oxşar məsələ həll etmək olar:

Məsələ: Hər bir nöqtəsində qrafikinə çəkilən toxunan düz xəttin bucaq əmsalı toxunma nöqtəsinin absisindən 3 dəfə böyük olan müstəvi əyrisini tapmalı.

Həlli: Fərz edək ki, $y = f(x)$ axtarılan müstəvi əyrisinin tənliyidir. Onda şərtə görə $f'(x) = 3x$ olmalıdır. Onda

$$f(x) = \int 3x dx = \frac{3x^2}{2} + c$$

olar. Burada c - istənilən sabitdir. Tapılan funksiyanın həll olduğunu yoxlayaq: $y = 1{,}5x^2 + c$ funksiyasının qrafikinə çəkilən toxunan düz xəttin bucaq əmsalı $f'(x) = 3x$ -ə bərabərdir. Deməli, həlldir. Bundan sonra, şagirdlərə izah etmək lazımdır ki, məsələnin həli c sabitindən asılı olduğuna görə onun həlli sonsuzdur. Məsələnin həllinin yeganə olması üçün əlavə şərt verilməlidir. Fərz edək ki, bu şərt (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən göstərilən xassəli əyrinin tapılmasıdır. Onda

$$y_0 = 1{,}5x_0^2 + c$$

olur. Buradan

$$c = y_0 - 1{,}5x_0^2$$

tapılır. Deməli, əlavə şərtin verilməsi məsələnin yeganə həllini tapmağa imkan verdi. Bu həll

$$f(x) = 1{,}5x^2 + y_0 - 1{,}5x_0^2$$

funksiyasıdır.

Göstərilən hazırlıq işindən sonra diferensial tənliyin tərtibi, diferensial tənliyin ümumi həlli, diferensial tənliyin xüsusi həlli anlayışları daxil edilir: diferensial tənliyə daxil olan ən yüksək tərtibli törəmənin tərtibi diferensial tənliyin tərtibi adlanır; məsələn, $y' = ky$ bir tərtibli diferensial tənlikdir. $y^n = -k^2 \cdot y$ tənliyinin tərtibi 2-dir. Bir tərtibli diferensial tənliyin həlli bir sabitdən asılı olur. c-ə konkret qiymət verməklə xüsusi həllər alına bilər.

Qeyd etmək lazımdır ki, məktəb riyaziyyat kursunda bir tərtibli adi diferensial tənliklərin ümumi nəzəriyyəsini öyrənmək nəzərdə tutulmur.

§6. Məktəb həndəsə kursunun vəzifələri və xüsusiyyətləri

Məktəb həndəsə kursunun mənimsənilməsi şagirdlərin fəza təsəvvürlərinin formalaşmasından ciddi şəkildə asılıdır. Şagirdlərin fəza təsəvvürlərinin formalaşması isə öz növbəsində təlim prosesində əyani vasitələrdən düzgün istifadə etməkdən asılıdır. Qeyd etmək lazımdır ki, həndəsə kursunun şüurlu mənimsənilməsi həm də şagirdlərin müstəqil işinin düzgün təşkil edilməsindən asılıdır.

Məktəb həndəsə kursunun məzmunu son iki əsrdə demək olar ki, sabit qalıb. Planimetriya kursunda əsasən aşağıdakı bölmələr öyrənilir:

1) düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti;
2) üçbucaqların xassələri;
3) dördbucaqlıların xassələri;
4) çevrənin xassələri;
5) fiqurların bərabərliyi və oxşarlığı münasibətləri;
6) kəmiyyətlərin (uzunluğun, sahənin) və s. ölçülməsi.

Stereometriya kursunda isə aşağıdakı bölmələr öyrənilir:

1) düz xətt və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri;
2) çoxüzlülərin xassələri;
3) fırlanma cisimlərinin xassələri;
4) həndəsi fiqurların öyrənilməsində koordinat və vektor metodlarının tətbiqləri;
5) həndəsi çevirmələrin xassələri.

Həndəsə kursunun əsas vəzifələri aşağıdakılar hesab olunur:

1) həndəsi faktları, həndəsi faktları almaq metodlarını və həndəsi faktları tətbiq etmək imkanlarını sistemli şəkildə öyrənmək;
2) şagirdlərin aldığı həndəsi biliklərdən digər məktəb fənlərinin öyrənilməsində istifadə etmək bacarıq və vərdişlərini inkişaf etdirmək;
3) şagirdlərin fəza və məntiqi təfəkkürlərini inkişaf etdirmək.

Məktəb həndəsə kursunun məntiqi quruluşunun təkmilləşdirilməsi prosesi əsasən aşağıdakı istiqamətlərdə aparılır:

1) Evklid həndəsəsini tam olmayan və qeyri-aşkar şəkildə daxil edilən ilk anlayış və münasibətlərin və aksiomlar sisteminin əsasında şərh etmək;
2) Evklid həndəsəsini məntiqi cəhətdən kifayət qədər ciddi şəkildə şərh etməyə imkan verən, aşkar şəkildə daxil edilən ilk anlayış və münasibətlərin və aksiomlar sisteminin əsasında şərh etmək.

Azərbaycan Respublikasının orta təhsil müəssisələrində həndəsə kursu son illərdə nəşr olunmuş VII-XI siniflərin «Həndəsə» dərslikləri əsasında öyrənilir. Bu dərsliklərdə Evklid həndəsəsi məntiqi cəhətdən ciddi şəkildə şərh olunur.

Aşağıda məktəb həndəsəsinin aksiomlar sisteminin bir variantı verilir:

1) (Aid olma aksiomu). İstənilən düz xəttin üzərində olan nöqtələr və onun üzərində olmayan nöqtələr var;
2) (Düz xətt aksiomu). İxtiyari iki nöqtədən bir və yalnız bir düz xətt keçir;
3) (Nöqtələrin düz xətt üzərində yerləşməsi aksiomu). Düz xəttin ixtiyari üç nöqtəsindən biri və yalnız biri qalan ikisi arasında yerləşir;
4) (Düz xəttin bölünməsi aksiomu). Düz xəttin ixtiyari A nöqtəsi bu düz xəttin qalan nöqtələrini aşağıdakı şərti ödəyən iki çoxluğa ayırır: eyni çoxluğa aid iki nöqtə A nöqtəsinin bir tərəfində yerləşir;
5) (Parçaların ölçülməsi aksiomu). Uzunluq vahidi seçməklə hər bir parçanın uzunluğunu ölçmək olar, yəni onun uzunluğunu müsbət ədədlə ifadə etmək olar;

6) (Parçaların toplanması aksiomu). Parçanın uzunluğu, onun hər hansı daxili nöqtəsi ilə bölündüyü parçaların uzunluqları cəminə bərabərdir;
7) (Parçanın ayrılması aksiomu). Şüanın başlanğıcından uzunluğu verilmiş bir və yalnız bir parça ayırmaq olar;
8) (Bucağın ölçülməsi aksiomu). Hər bir bucağın sıfırdan böyük müəyyən dərəcə ölçüsü var. Açıq bucaq 180^0-yə bərabərdir;
9) (Bucaqların toplanması aksiomu). Bucağın dərəcə ölçüsü onun öz daxili şüası ilə bölündüyü bucaqların dərəcə ölçüləri cəminə bərabərdir;
10) (Tusi-Paş aksiomu). Üçbucağın təpələrindən keçməyən düz xətt onun bir tərəfini kəsirsə, onda həmin düz xətt digər iki tərəfdən yalnız birini kəsir;
11) (Bucağın ayrılması aksiomu). İstənilən şüadan başlayaraq verilmiş yarım müstəvidə bir tərəfi həmin şüa olan bir və yalnız bir bucaq ayırmaq olar;
12) (Üçbucaqların bərabərliyinin birinci əlaməti). İki üçbucağın iki tərəfi və onlar arasındakı bucağı bərabərdirsə, bu üçbucaqlar bərabərdir;
13) (Paralellik aksiomu). Düz xəttin üzərində olmayan nöqtədən bu düz xəttə ən çoxu bir paralel düz xətt çəkmək olar.

Əgər həndəsi fiqur, ortaq daxili nöqtəsi olmayan sonlu sayda üçbucaqlardan ibarətdirsə, ona sadə fiqur deyəcəyik. Aşağıdakı aksiomlar sadə fiqurların sahələrini hesablamağa imkan verir:

14) (Sahənin varlığı aksiomu). Hər bir sadə fiqurun seçilmiş ölçü vahidi ilə ifadə olunan müsbət sahəsi var;

15) (Sahələrin bərabərliyi aksiomu). Bərabər üçbucaqların sahəsi bərabərdir;

16) (Sahələrin toplanması aksiomu). Əgər fiqur, ortaq daxili nöqtəsi olmayan sonlu sayda sadə fiqurlardan ibarətdirsə, onda bu fiqurun sahəsi onun hissələrinin sahələri cəminə bərəbərdir;

17) (Sahə vahidi aksiomu). Tərəfi a olan kvadratın sahəsi a^2-na bərabərdir.

Son 50 ildə məktəb həndəsə kursunun həm məntiqi quruluşu təkmilləşdirilmiş, həm də məktəb həndəsə kursuna yeni ideyalar daxil edilmişdir. Məktəb həndəsə kursunun əsasını təşkil edən, yeni riyazi ideyaları reallaşdırmağa imkan yaradan elmi-metodik müddəalar aşağıdakılar hesab olunur:

1) həndəsi fiqur nöqtələr çoxluğudur;
2) Evklid həndəsəsindən fərqli həndəsə vardır;
3) həndəsi çevirmə müstəvinin özü-özünə qarşılıqlı birqiymətli inikasıdır;
4) həndəsə kursunun öyrənilməsi şagirdin məntiqi təfəkkürünü inkişaf etdirməlidir;
5) kəmiyyətlərin ölçülməsinin öyrənilməsi həndəsə təliminin əsas vəzifələrindən biridir və s.

Təlimdə göstərilən müddəaların hər biri tədricən və ehtiyatla reallaşdırılır.

X sinifdən başlayaraq şagirdlər stereometriya kursunu sistemli şəkildə öyrənir. Stereometriya kursunun öyrənilməsi prosesində şagirdlər aşağıdakı ənənəvi çətinliklərlə qarşılaşırlar:

1) planimetriya kursunun tam mənimsənilməməsi;

2) fəza təsəvvürlərinin zəif inkişaf etməsi;

3) şagirdlərin məntiqi təfəkkürünün zəif inkişaf etməsi: planimetriya kursunun öyrənilməsində əsasən konkret-induktiv metoddan istifadə olunur. Stereometriya kursunun öyrənilməsi prosesində şagirdlər konkret təklifi əsaslandırmaqla yanaşı, həm də bu təklifi formal-məntiqi dildə ifadə etməyi bacarmalıdır. Stereometriya kursunun öyrənilməsində əsasən mücərrəd-deduktiv metoddan istifadə olunur. Deməli, şagirdlər stereometriya kursunu öyrənmək üçün bu metoddan istifadə etməyi bacarmalıdır;

4) tədris vaxtının az olması: stereometriya kursunun öyrənilməsinə planimetriya kursunun öyrənilməsinə nisbətən az tədris vaxtı ayrılır. Ona görə də stereometriya kursunun öyrənilməsi prosesində şagirdlərin müstəqil işinə xüsusi diqqət yetirmək lazımdır;

5) fəzada qurma məsələlərinin həlli metodlarının müstəvidə qurma məsələlərinin həlli metodlarından ciddi surətdə fərqlənməsi: fəzada qurma məsələlərin həlli prosesində ən mühüm mərhələ qurulması tələb olunan fiqurun varlığını əsaslandırmaqdır.

Həndəsə kursunun tədrisi təcrübəsi göstərir ki, bu kursun öyrənilməsi prosesində şagirdlərin bilik və bacarıqlarında aşağıdakı ənənəvi nöqsanlar olur:

1) həndəsi fiqurların qarşılıqlı vəziyyəti şagirdlər tərəfindən düzgün təyin edilmir;
2) anlayışların tərifi ilə onların əlamətləri qarışdırılır;
3) düz və tərs teoremlərdən düzgün istifadə olunmur;

4) həndəsi fiqurların xassələri haqqında yalnız onların modelinə və ya çertyojuna əsaslanaraq düzgün olmayan nəticə çıxarmaq;
5) həndəsi fiqurların fəzadakı qarşılıqlı vəziyyətini anoloji fiqurların müstəvidəki qarşılıqlı vəziyyəti ilə eyniləşdirmək (məsələn, düz xətlə müstəvinin kəsişmə nöqtəsinin düzgün təyin edilməməsi, müstəvilərin kəsişmə xəttinin düzgün təsvir edilməməsi və s.).

Göstərilən nöqsanları aradan qaldırmaq həm də həndəsə təliminin keyfiyyətini yüksəltmək üçün aşağıdakılara əməl olunmalıdır:

1) şagirdlərin fəza təsəvvürlərinin məqsədyönlü surətdə inkişaf etdirilmək;
2) şagirdlərə fəza fiqurlarını müstəvi çertyojda təsvir etməyi öyrətmək;
3) şagirdlərə stereometriya məsələlərini həll etməyi öyrətmək.

Şagirdlərin fəza təsəvvürlərini inkişaf etdirmək üçün xüsusi tərtib olunmuş çalışmalar sistemindən istifadə olunur. Belə çalışmalar sistemindən istifadə etməyə stereometriyanın ilk dərslərindən başlamaq lazımdır.

Təcrübə göstərir ki, kubun çertyojundan istifadə etməklə aşağıdakılara oxşar tapşırıqları həll etmək çox əhəmiyyətlidir:

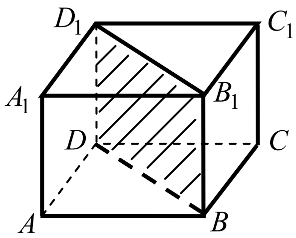
a) verilən düz xətt və müstəvinin kəsişmə nöqtəsini tapmalı;

b) verilən iki müstəvinin kəsişmə xəttini qurmalı;

c) kubun verilən müstəvi kəsiyini qurmalı.

Məsələ: Kubun diaqonal kəsiyini qurmalı.

Diaqonal kəsiyinin tərifindən istifadə etməklə aşağıdakı qurmanı asanlıqla aparmaq olar.



§7. Həndəsi fiqurların xassələrinin öyrənilməsi metodikası

I. I-IV siniflərdə öyrənilməsi nəzərdə tutulan həndəsi biliklərin məzmununu aşağıdakılar təşkil edir:

- düz xətt;
- düz xətt parçası;
- sınıq xətt;
- üçbucaq;
- çoxbucaqlı (kvadrat və düzbucaqlı);
- çevrə;
- bucaq.

Təlim təcrübəsi göstərir ki, ibtidai təhsilin sonunda şagirdlərin əksəriyyətinin öyrənilən həndəsi fiqurlar haqqında aydın təsəvvürü olmur. Məsələn, onlar düz xəttlə düz xətt parçasını, kvadratla düzbucaqlını fərqləndirə bilmirlər. Ona görə də V-VI siniflərdə həndəsə elementlərinin öyrənilməsi prosesinin başlanğıcında şagirdlərin bilik və bacarıqlarındakı nöqsanların aşkar edilməsinə və onların aradan qaldırılmasına xüzusi diqət yetirmək lazımdır. V-VI siniflərdə həndəsənin öyrənilməsində tətbiq olunan təlim metodu əsasən əyani-induktiv metoddur. Bu mərhələdə qurmaya və ölçməyə aid tapşırıqların yerinə yetirilməsi şagirdlərə həndəsi faktları müəyyən etməkdə əvəzsiz kömək göstərir.

II. VII sinifdən başlayaraq həndəsə kursu sistemli şəkildə öyrənilir. VII sinfin həndəsə kursunun məzmununu əsasən aşağıdakı bölmələr təşkil edir:

1) düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti;
2) düz xətlərin paralellik əlamətləri;
3) üçbucaq və onun elementləri və s.

VII sinfin həndəsə kursunda «Paralellik» mövzusu xüsusi yer tutur. Bunun əsas səbəbləri aşağıdakılar hesab olunur:

1) Evklid həndəsi qeyri-Evklid həndəsələrdən «Paralellik» aksiomu ilə fərqlənir. Evklid həndəsəsində «düz xətt üzərində olmayan nöqtədən bu düz xəttə paralel olan yalnız bir düz xətt çəkmək olar» aksiomu qəbul edilir. Mütləq həndəsədə isə «düz xətt üzərində olmayan nöqtədən olmayan nöqtədən bu düz xəttə paralel olan ən azı bir düz xətt çəkmək olar» aksiomu qəbul edilir;
2) dördbucaqlıların təsnifatında paralellik anlayışı mühüm rol oynayır;
3) «Paralellik» münasibəti «eynigüclülük» münasibətinə konkret misaldır və s.

Planimetriya kursunda paralel düz xətlər mövzusu aşağıdakı ardıcıllıqla öyrənilir:

1) paralel düz xətlərin tərifinin verilməsi;
2) paralel düz xətlərin varlığının əsaslandırılması;
3) paralel düz xətlərin qurulması;

4) paralel düz xətlərin xassələrinin öyrənilməsi;
5) düz xətlərin paralellik əlamətləri;
6) öyrənilən biliklərin məsələlərin həllində tətbiqi.

III. Perpendikulyar düz xətlər haqqında şagirdlərin ilkin təsəvvürü olduğundan düz xətlərin perpendikulyar olması münasibətinə tərif verdikdən sonra, perpendikulyar düz xətlərin varlığı əsaslandırılmalıdır. Düz xətlərin perpendikulyarlığı ilə iki düz xətt arasındakı bucaq anlayışının sıx əlaqəsi var. Bu anlayışdan əvvəl şagirdlər bucağın tənböləni anlayışı ilə tanış olduğundan, perpendikulyar düz xətlərə misal olaraq açıq bucaq və onun tənbölənini göstərmək olar.

Perpendikulyar və paralel düz xətlərin qarşılıqlı əlaqəsinə də xüsusi diqqət verilməlidir. Bu əlaqələrin müəyyən edilməsində isbata aid çalışmalar daha səmərəlidir. Nöqtədən düz xəttə çəkilən perpendikulyarın yeganəliyi əsaslandırıldıqdan sonra, nöqtədən düz xəttə çəkilən mail və mailin düz xətt üzərindəki proeksiyası anlayışları daxil edilir. Bundan sonra şagirdlərin diqqətinə çatdırmaq lazımdır ki, düz xətt xaricindəki nöqtədən bu düz xəttə sonsuz sayda mail çəkmək olar. Bu maillərin uzunluqları perpendikulyarın uzunluğundan kiçik olmur.

IV. Stereometriyanın öyrənilməsi prosesində ilk dərslərin həlledici əhəmiyyəti vardır. Düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri ilk anlayış və aksiomlarla müəyyən edildiyindən stereometriya aksiomlarının hər birini aşağıdakı ardıcıllıqla daxil etmək lazımdır:

a) aksiomu model üzərində təsvir etmək;

b) aksiomu şifahi şərh etmək və simvolik dildə yazmaq;

c) aksiomu şəkildə təsvir etmək.

Düz xətt və müstəvilərin paralelliyi mövzusunu aşağıdakı hissələrə bölməklə öyrənmək olar:

a) fəzada düz xətlərin paralelliyi;

b) düz xətt və müstəvilərin paralelliyi;

c) fəzada müstəvilərin paralelliyi;

d) paralel proyeksiya və onun xassələri; fəza fiqurlarının müstəvidə təsviri.

Birinci hissənin öyrənilməsi zamanı düz xətlərin çarpaz olması əlamətlərinə xüsusi diqqət vermək lazımdır. Bu məqsədlə modellər üzərində tapşırıqların yerinə yetirilməsi vacibdir.

Düz xətt və müstəvilərin perpendikulyarlığı mövzusunu şərti olaraq aşağıdakı hissələrə bölüb öyrənmək olar:

a) fəzada düz xətlərin perpendikulyarlığı;

b) düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı;

c) müstəvilərin perpendikulyarlığı.

Bu mövzunun öyrənilməsi zamanı «düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq» və «iki müstəvi arasındakı bucaq» anlayışlarının formalaşmasına xüsusi diqqət verilməlidir.

§8. Çoxbucaqlılar və çoxüzlülər mövzularının öyrənilməsi metodikasının xüsusiyyətləri

I. Qabarıq çoxbucaqlıları bucaqlarının sayına görə növlərə ayırırlar: üçbucaq, dördbucaqlı, beşbucaqlı və s.

Üçbucaqları bucaqlarına görə: itibucaqlı, düzbucaqlı və korbucaqlı üçbucaqlara ayırırlar. Üçbucaqları tərəflərinin uzunluğuna görə bərabərtərəfli, bərabəryanlı, müxtəlif tərəfli üçbucaqlara ayırmaq olur.

Üçbucaqların xassələrinin öyrənilməsində üçbucaqların bərabərlik əlamətlərindən məsələlərin həllində istifadə etmək bacarıqlarının formalaşdırılması əsas məqsədlərdən biridir; bu əlamətləri məsələ həlli prosesində aşağıdakı ardıcıllıqla tətbiq etmək olar:

1) bərabərliyi güman edilən iki üçbucaq seçilir;
2) bu üçbucaqlarda bərabər olan elementlər müəyyən edilir;
3) məlum olan əlamətlərdən birinə əsaslanaraq bu üçbucaqların bərəbərliyi nəticəsi çıxarılır;
4) üçbucaqların bərəbərliyinə əsaslanaraq onların konkret uyğun elementlərinin bərabərliyi nəticəsi çıxarılır.

II. Çoxüzlü anlayışını daxil etmək üçün çoxbucaqlı, qabarıq çoxbucaqlı, çoxbucaqlının elementləri anlayışlarından istifadə etmək lazımdır. Ona görə çoxüzlü anlayışını daxil etməzdən əvvəl bu bilikləri təkrarlamaq vacibdir. Çoxüzlü anlayışını daxil etməzdən əvvəl şagirdlərə konkret çoxüzlülərin modelini göstərmək lazımdır. Til, üz və təpə anlayışlarını yalnız qabarıq çoxüzlülər üçün daxil etmək əlverişlidir. Çoxüzlünün elementlərinə tərif verərkən tanış olan çoxüzlü modelindən istifadə etmək lazımdır.

Məktəb həndəsə kursunda yalnız Eyler göstəricisi 2 olan qabarıq çoxüzlülər öyrənilir. Qeyd edək ki, Eyler göstəricisi aşağıdakı kimi hesablanır: $T - L + \ddot{U}$, burada T ilə çoxüzlünün təpə nöqtələrinin sayı, L ilə tillərinin sayı, $\ddot{U}$ ilə isə üzlərinin sayı işarə olunmuşdur.

Məsələn, kub üçün bu göstərici $(8-12+6)=2$, tetraedr üçün isə $(4-6+4)=2$ -dir.

Prizma mövzusunu aşağıdakı hissələrə bölüb öyrənmək əlverişli hesab olunur:

a) prizma və onun elementləri;

b) düz və düzgün prizma;

c) mail prizma;

d) paralelepiped və onun elementləri.

Konkret prizma modellərini tədqiq etdikdən sonra n-bucaqlı prizmada aşağıdakı elementlərin olduğu nəticəsini çıxarmaq olar:

a) n-bucaqlı prizmada $(n+2)$ sayda üz var;

b) n-bucaqlı prizmada n sayda yan üz var;

c) n-bucaqlı prizmada $3n$ sayda til var;

d) n-bucaqlı prizmada $n(n-3)$ sayda diaqonal var ($n \geq 4$);

e) n-bucaqlı prizmada $n(n$-3)\ 2 sayda diaqonal kəsiyi var və s.

Prizmanın hündürlüyü anlayışı daxil edildikdən sonra qeyd etmək lazımdır ki, prizmanın yan tili onun hündürlüyü ola bilər; prizmanın hündürlüyü onun üzlərindən biri üzərində ola bilər.

Düz və düzgün prizma anlayışları daxil edildikdən sonra prizmanın elementlərinin hesablanmasına aid məsələlər həll etmək olar. Belə məsələləri aşağıdakı qruplara bölmək olar:

a) prizmanın hündürlüyünün qurulmasına və hesablanmasına aid məsələlər;

b) prizmanın ikiüzlü bucağının xətti bucağının qurulmasına və hesablanmasına aid məsələlər;

c) prizmanın diaqonalları arasındakı bucağın qurulmasına və hesablanmasına aid məsələlər;

d) prizmanın izlərinin diaqonalları arasındakı bucağın qurulmasına və hesablanmasına aid məsələlər;

e) prizmanın və onun elementlərinin səthinin sahəsinin hesablanmasına aid məsələlər.

Piramida mövzusunu məntiqi cəhətdən tam olan aşağıdakı hissələrə bölüb öyrənmək olar:

a) piramidanın tərifi. Piramilanın elementləri;

b) düzgün piramida. Düzgün piramidanın apofemi;

c) piramidanın oturacağına paralel olan kəsiklərinin xassələri;

d) piramidanın səthinin sahəsi;

e) kəsik piramila.

Piramidanın öyrənilməsinə onu qurmağı öyrətməklə başlamaq lazımdır. Əvvəlcə piramidanın konstruktiv tərifini vermək lazımdır: «Bir üzü qabarıq n-bucaqlı $(n \geq 3)$, qalan üzləri isə yalnız bir ortaq nöqtəsi olan üçbucaqlardan ibarət olan çoxüzlü piramida adlanır». Bu tərifi daxil etdikdən sonra, müəllim:

a) hər hansı n-bucaqlı çəkməli;

b) n-bucaqlı müstəvisində olmayan hər hansı bir nöqtəni qeyd etməli;

c) n-bucaqlının hər bir təpə nöqtəsini bu qeyd olunmuş nöqtə ilə düz xətt parçaları ilə birləşdirməli;

d) alınan fiqurun piramida olduğunu əsaslandırmalıdır.

Piramidalarıı onların oturacağındakı n-bucaqlılara görə təsnifata ayırırlar (məsələn, üçbucaqlı piramida, dördbucaqlı piramida və s.).

Piramidaları onların oturacağındakı n-bucaqlıların düzgün və düzgün olmayan olması əlamətlərinə görə düzgün və düzgün olmayan piramidalara ayırırlar. Konkret model və ya çertyoj əsasında piramidanın elementlərinin sayı haqqında şagirdlərə məlumat vermək lazımdır: n-bucaqlı piramidada $(n \geq 3)$:

- təpə nöqtələrinin sayı $(n+1)$-ə;
- tillərin sayı $2n$-ə;
- üzlərin sayı $(n+1)$-ə;
- ikiüzlü bucaqların sayı $2n$-ə bərabər olur və s.

Xüsusi qeyd etmək lazımdır ki, piramidanın diaqonalı olmur.

Təlim təcrübəsi göstərir ki, şagirdlər piramidanın ikiüzlü bucaqlarının xətti bucaqlarını qurmaqda və onların qiymətlərini hesablamaqda çətinlik çəkirlər. Ona görə müəllim piramidanın ikiüzlü bucaqlarının hesablanmasına aid məsələlərin həllinə xüsusi diqqət yetirməlidir. Aşağıdakı növdən olan piramidalara aid məsələlərin həllinə də xüsusi diqət yetirmək lazımdır:

a) piramidanın hündürlüyü oturacağın xaricinə çəkilən çevrənin mərkəzindən keçir;

b) piramidanın hündürlüyü oturacağın daxilinə çəkilən çevrənin mərkəzindən keçir;

c) piramidanın yan üzü oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır;

d) piramidanın yan tili oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır.

Piramidanın oturacağına paralel olan kəsiyin xassəsi öyrənildikdən sonra kəsik piramida anlayışı daxil edilir. Kəsik piramida üçün düzgün kəsik piramida və apofem anlayışları daxil edilir.

Çoxüzlülər mövzusunun öyrənilməsi zamanı şagirdlərə düzgün çoxüzlülər haqqında məlumat vermək lazımdır. Şagirdlərə düzgün çoxüzlülərin beş növünün olması məlumatını isbatsız vermək olar. Bunlar aşağıdakılardır: tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr.

III. Fırlanma cisimlərini öyrənərkən çoxlu sayda yeni anlayış daxil edilir. Silindr və konus anlayışlarına məktəb həndəsə kursunda ciddi riyazi tərif verilmir. Məktəb həndəsə kursunda bu fiqurlara verilən təriflər həmin fiqurları təsvir edir:

Düzbucaqlının bir tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan fiqur silindr adlanır.

Düzbucaqlı üçbucağın bir kateti ətrafında fırlanmasından alınan fiqur konus adlanır.

Silindrin elementlərinə tərif verərkən onun modelindən və ya çertyojundan istifadə etmək lazımdır.

Silindrin əsas elementləri aşağıdakılardır:

a) silindrin doğuranı;

b) silindrin hündürlüyü;

c) silindrin oturacağının radiusu;

d) silindrin oxu;

e) silindrin ox kəsiyi;

f) silindrə toxunan müstəvi.

Konusun elementləri aşağıdakılardır:

a) konusun doğuranı;

b) konusun hündürlüyü;

c) konusun oturacağının radiusu;

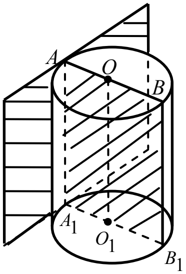
d) konusun oxu;

e) konusun ox kəsiyi;

f) konusa toxunan müstəvi.

Şagirdlərin silindrə və konusa toxunan müstəviləri qurmaq qaydalarını mənimsəməsinə xüsusi diqqət yetirilməlidir. Məsələn, silindrə toxunan müstəvini aşağıdakı ardıcıllıqla qurmaq olar:

1) toxunan müstəvi ilə silindrin ortaq xətti olan AA_1 doğuranını seçməli;
2) AA_1 doğuranından keçən AA_1B_1B ox kəsiyini qurmalı;
3) AA_1 doğuranından keçən və AA_1B_1B müstəvisinə perpendikulyar olan müstəvini qurmalı.



Konusun müstəvi kəsikləri üçün aşağıdakı hallar fərqləndirilir:

a) kəsən müstəvi konusun təpə nöqtəsindən keçən hal;

b) kəsən müstəvi oturacağa paralel olan hal.

IV. Məktəb həndəsə kursunda koordinat metodunun öyrənilməsinin əsas məqsədləri aşağıdakılar hesab olunur:

a) koordinat metodu nöqtələrinin koordinatlarına görə həndəsi fiqurların xassələrini öyrənməyə imkan yaradır;

b) koordinat metodu həndəsənin öyrənilməsində cəbri metodları tətbiq etməyə imkan yaradır;

c) koordinat metodu digər elmi sahələrdə riyazi metodları tətbiq etməyə imkan yaradır.

Koordinat metodunun əsas anlayışları aşağıdakılar hesab olunur: - koordinat müstəvisi, koordinat oxları, absis, ordinat və nöqtənin koordinatları.

Koordinat metodunu tətbiq etmək üçün şagirdlər əsasən aşağıdakıları bilməli və bacarmalıdırlar:

a) koordinatları verilən nöqtəni koordinat müstəvisində qurmağı;

b) koordinat müstəvisində verilən nöqtənin koordinatlarını tapmağı;

c) verilən iki nöqtə arasındakı məsafəni hesablamağı;

d) verilmiş parçanın uc nöqtələrinin koordinatlarına görə onun orta nöqtəsinin koordinatlarını hesablamağı;

c) iki müxtəlif nöqtəsinin koordinatlarına görə bu nöqtələrdən keçən düz xəttin tənliyini yazmağı;

f) verilmiş radiusuna və mərkəzinin koordinatlarına görə çevrənin tənliyini yazmağı.

Koordinat metodunun formalaşdırılması prosesini aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

a) hazırlıq mərhələsi;

b) koordinat metodunun ayrı-ayrı komponentlərinin formalaşdırılması mərhələsi;

c) koordinat metodunun bütün komponentlərinin formalaşdırılması mərhələsi;

d) metodun mənimsənilmiş bilik, bacarıq və vərdişlər sisteminə əlavə edilməsi mərhələsi.

Birinci mərhələdə koordinatları verilmiş nöqtənin koordinat müstəvisində qurulmasına aid çalışmalar həll edilməlidir. İkinci mərhələdə koordinat metodunun tətbiqi ilə həll olunan sadə məsələlər həll edilməlidir. Bu məsələlər aşağıdakılardır:

a) koordinatları verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafənin tapılması;
b) uc nöqtələrinin koordinatlarına görə parçanın orta nöqtəsinin koordinatlarının tapılması;
c) verilmiş iki nöqtəsinin koordinatlarına görə düz xəttin tənliyinin tərtib olunması;
d) verilmiş radiusuna və mərkəzinin koordinatlarına görə çevrənin tənliyinin tərtib olunması.

Üçüncü mərhələdə nisbətən çətin situasiyalarda koordinat metodunun tətbiq olunmasını tələb edən məsələlər həll edilə bilər.

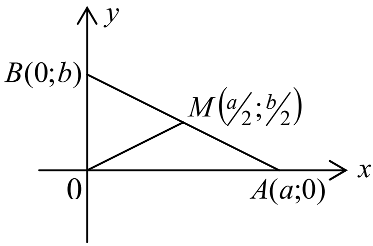
Dördüncü mərhələdə isə fəndaxili və fənlərarası əlaqələrin yaradılmasını tələb edən məsələlər həll edilir.

Koordinat metodunun tətbiqi zamanı koordinat sisteminin seçilməsi çox mühüm rol oynayır. Məsələn, koordinat metodunun tətbiqi ilə isbat edək ki, «düzbucaqlı üçbucaqda təpə nöqtələri hipotenuzunun orta noqtəsindən eyni məsafədədir». Bu təklifin isbatı üçün koordinat başlanğıcını düz bucaq təpəsində yerləşdirmək, koordinat oxlarını isə katetlər üzrə yönəltmək daha əlverişlidir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $MB = MA = MO$,

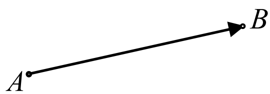
$$MB = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2},$$

$$MO = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2},$$

$$MA = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2}.$$



Vektor anlayışından müxtəlif məktəb fənlərində (riyaziyyatda, fizikada və s.) istifadə olunur. Ona görə də vektor anlayışına müxtəlif təriflər verilə bilər. Bəzi müəlliflər vektoru paralel köçürmə ilə eyniləşdirir: əgər müstəvinin özü-özünə inikası zamanı müstəvinin hər bir nöqtəsi eyni istiqamətdə və eyni məsafədə yerləşən nöqtəyə inikas olunarsa, onda belə çevirmə paralel köçürmə adlanır. Vektoru nöqtələrin nizamlı cütü kimi də daxil etmək olar: məsələn, $\overrightarrow{AB}$ vektoru $(A;B)$ nöqtələr cütü ilə birqiymətli təyin olunur; A nöqtəsi vektorun başlanğıc, B isə vektorun son nöqtəsidir.



Məktəb həndəsə kursunda vektor metodunun öyrənilməsinin əsas məqsədləri aşağıdakılar hesab olunur:

1) vektor metodu məsələlərin və teoremlərin isbatının ən universal metodudur;
2) vektor anlayışı fəndaxili və fənlərarası əlaqələrin yaradılmasında ən əlverişli vasitədir.

Vektor metodunun əsas anlayışları aşağıdakılardır:

- vektor, vektorun başlanğıcı, vektorun sonu;
- vektorun uzunluğu;
- vektorun koordinatları;
- vektorların cəmi, fərqi;
- vektorların ədədə hasili: kollinear vektorlar;
- vektorların skalyar hasili;
- iki vektor arasındakı bucaq;
- vektorların bazis vektorlarına ayrılması.

Vektor metodunun formalaşdırılması prosesini aşağıdakı əsas mərhələlərə bölmək olar:

1) hazırlıq mərhələsi;
2) metodun ayrı-ayrı komponentlərinin formalaşdırılması mərhələsi;
3) metodun bütün komponentlərinin formalaşdırılması mərhələsi;
4) metodun mənimsənilmiş bilik, bacarıq və vərdişlər sisteminə əlavə edilməsi mərhələsi.

Birinci mərhələdə vektor metodunu öyrənməyin vacib olduğunu göstərən məsələlər həll edilməlidir. Bunun üçün elə məsələ seçmək lazımdır ki, onun vektor metodunun tətbiqi ilə həlli digər həll metodlarından səmərəli olsun. İkinci mərhələdə həll edilən məsələlər metodun ayrı-ayrı komponentlərinin tapılmasına aid olmalıdır. Bu məqsəd üçün seçilən məsələlər nisbətən sadə olmalıdır.

Vektor metodunun bütün komponentlərinin formalaşdırılmasına xidmət edən məsələlər bu metodun nisbətən çətin situasiyalarda tətbiq olunmasını tələb etməlidir.

Dördüncü mərhələ üçün seçilən məsələlər fəndaxili və fənlərarası əlaqələrin yaradılmasına xidmət etməlidir.

Məsələ həlli prosesində vektor metodunun tətbiqi aşağıdakı mərhələlər üzrə aparılır:

a) bazis vektorlarının seçilməsi;

b) məsələnin verilənlərinin bazis vektorları vasitəsilə ifadə olunması;

c) vektor tənliklərin qurulması və sadələşdirilməsi;

d) vektor-tənliklərin cəbri tənliklər sistemi ilə əvəz olunması;

e) cəbri tənliklər sisteminin həll edilməsi.

Koordinat və vektor metodları məsələlərin həlli və teoremlərin isbatı prosesində demək olar ki, eyni zamanda tətbiq olunurlar. Məsələn, fəzada iki çarpaz düz xətt arasındakı bucağın tapılmasında bu iki metod eyni zamanda tətbiq olunur.

Stereometriya kursunda müstəvi və sferanın tənliyi də koordinat və vektor metodlarının birgə tətbiqi ilə çıxarılır: $OXYZ$ koordinat sistemində $ax+by+cz+d=0$ şəklində tənlik müstəvinin tənliyi adlanır $(|a|+|b|+|c|>0)$. a,b və c ədədlərinin bu müstəviyə perpendikulyar vektorun koordinatları olduğunu xüsusi qeyd etmək lazımdır. Şagirdləri müstəvinin tənliyi ilə tanış etdikdən sonra fəzada düz xətti təyin etmək imkanı yaranır. Düz xətti iki müstəvinin kəsişmə xətti kimi daxil etmək olar:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\,. \end{cases}$$

Sferanın tənliyinin çıxarılışı şagirdlər üçün çətinlik yaratmır, ona görə ki, onun çıxarılışı çevrənin tənliyinin çıxarılışına oxşayır. Koordinat metodunun köməyi ilə

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

tənliyinin $OXYZ$ koordinat sistemində mərkəzi $M(a;b;c)$ nöqtəsində olan R radiuslu sferanın tənliyi olduğunu asanlıqla əsaslandırmaq olur.

§9. Həndəsi çevirmələrin öyrənilməsi metodikası

Məktəb həndəsə kursunda həndəsi çevirmələrin dərindən öyrənilməsi nəzərdə tutulmur. Müstəvidə həndəsi çevirməyə aşağıdakı şəkildə tərif vermək olar: əgər müstəvinin özü-özünə φ inikası zamanı hər-bir x nöqtəsi yeganə $\varphi(x)=x'$ nöqtəsinə inikas olunarsa və istənilən x_1 və $x_2 (x_1 \neq x_2)$ nöqtələri üçün $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ olarsa, onda φ inikası həndəsi çevirmə adlanır.

Məktəb həndəsə kursunda həndəsi çevirmələrin iki növü öyrənilir: hərəkət və oxşarlıq çevirməsi.

Əgər F fiqurunu F_1 fiquruna çevirən həndəsi çevirmə istənilən iki nöqtə arasındakı məsafəni sabit saxlayırsa, onda belə həndəsi çevirmə hərəkət adlanır.

Hərəkətin aşağıdakı növləri vardır:

1) simmetriya;
2) paralel köçürmə;

3) dönmə.

Simmetriyanın da öz növbəsində iki növü vardır:

1) oxa nəzərən simmetriya;

2) nöqtəyə nəzərən simmetriya.

Oxa nəzərən simmetriyanın hərəkət olmasını koordinat metodu ilə asanlıqla isbat etmək olar. Simmetriya oxu kimi OY oxunu götürsək, onda $A(x_1;y_1)$ və $B(x_2;y_2)$ nöqtələri üçün $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ olur. Bu nöqtələrin obrazları $A_1(-x_1;y_1)$ və $B_1(-x_2;y_2)$ nöqtələri üçün isə $A_1B_1=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ olur. Deməli, $AB=A_1B_1$ olur.

Eyni qayda ilə, koordinat başlanğıcı $O(0;0)$ nöqtəsini simmetriya mərkəzi qəbul edərək, $A(x_1;y_1)$ və $B(x_2;y_2)$ nöqtələri və onların obrazları $A_1(-x_1;-y_1)$ və $B_1(-x_2;y_2)$ nöqtələri arasındakı məsafələrin bərabər olduğunu isbat etmək olar. Koordinat metodunun tətbiqi ilə

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b \quad (a \;\; \text{вя} \;\; b \;\; \text{сабитядядлярдир}) \end{cases}$$

düsturları ilə verilən paralel köçürmənin də hərəkət olduğunu göstərmək olar.

Dönmə çevirməsinin də hərəkəi olduğunu koordinat metodu ilə göstərmək olar.

Məktəb həndəsə kursunda hərəkətin tərsi olan çevirmənin də hərəkət olduğu göstərilir.

Oxşarlıq çevirməsi məktəb həndəsə kursunda xüsusi rola malikdir. Məktəb həndəsə kursunda oxşarlıq çevirməsinə aşağıdakı şəkildə tərif verilir: F fiqurunu F_1 fiquruna çevirən həndəsi çevirmədə istənilən iki nöqtə arasındakı məsafə eyni ədəd dəfə dəyişərsə, onda belə çevirmə oxşarlıq çevirməsi adlanır. Əgər φ oxşarlıq çevirməsi olarsa, onda F fiqurunun istənilən X və Y nöqtələri arasındakı XY məsafənin F_1 fiqurunun $\varphi(X) = X'$ və $\varphi(Y) = Y'$ nöqtələri arasındakı X_1Y_1 məsafəsinə nisbəti bu nöqtələrdən asılı olmayan müəyyən k ədədinə bərabər olur:

$$\frac{XY}{X_1Y_1} = k \quad (k > 0).$$

Burada k oxşarlıq əmsalı adlanır. Aydındır ki, $k = 1$ olduqda oxşarlıq çevirməsi hərəkətə çevrilir.

Oxşarlıq çevirməsi anlayışı daxil edildikdən sonra aşağıdakı təklifləri isbat etmək olar:

1) oxşarlıq çevirməsi düz xətti düz xəttə çevirir;
2) oxşarlıq çevirməsi şuanı şuaya çevirir;
3) oxşarlıq çevirməsi parçanı parçaya çevirir;
4) oxşarlıq çevirməsi iki şüa arasındakı bucağı sabit saxlayır;
5) oxşarlıq çevirməsinin tərsi də oxşarlıq çevirməsidir;
6) oxşarlıq çevirmələrinin superpozisiyası da oxşarlıq çevirməsidir.

Eyni qayda ilə fəzada oxşarlıq çevirməsi anlayışı daxil edilir və yuxarıdakı təkliflərin doğru olduğu qeyd edilir.

§10. Həndəsi qurmaların öyrənilməsi metodikası

Həndəsə məsələləri içərisində qurmaya aid məsələlər didaktik məqsədlərinə və həlli üsullarına görə xeyli fərqlənirlər.

Qurmaya aid məsələlər şagirdin məntiqi və fəza təfəkkürlərinin inkişafında çox böyük rol oynayır. Həndəsə kursunda qurma məsələsini həll etmək dedikdə yalnız xətkeş və pərgar vasitəsilə verilən komponentlərinə görə tələb olunan həndəsi fiqurun qurulması başa düşülür. Qurma məsələsinin həlli prosesini aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

a) həllin axtarılması mərhələsi;

b) qurmanın yerinə yetirilməsi mərhələsi;

c) həllin əsaslandırılması mərhələsi;

d) həllin tədqiq olunması mərhələsi.

Göstərilən mərhələlər içərisində üçüncü mərhələ ən vacib mərhələ hesab olunur. Həllin əsaslandırılması zamanı fərz olunur ki, tələb olunan fiqur qurulub. Sonra isə, qurulan fiqurla məsələnin verilənləri arasındakı əlaqələr araşdırılır. Bu əlaqələrin axtarılması zamanı müxtəlif çevirmələrdən istifadə oluna bilər.

Qurma məsələlərinin həlli zamanı aşağıdakı üsullardan istifadə olunur:

a) simmetriya üsulu;

b) dönmə üsulu;

c) paralel köçürmə üsulu;

d) oxşarlıq üsulu;

e) həndəsi yerlər üsulu.

a) Qurma məsələsinin həllində simmetriya üsulunu tətbiq edərkən aşağıdakı mühakimə əsas götürülür: əgər qurulması tələb olunan fiqur hər hansı düz xəttə nəzərən və ya hər hansı nöqtəyə nəzərən simmetrik olan nöqtələrə malik olarsa, onda həmin düz xəttə və ya nöqtəyə nəzərən simmetriya çevirməsi aparmaq əlverişlidir.

b) Qurma məsələsinin həllində dönmə üsulu tətbiq edilərkən qurulması tələb olunan fiqurun ayrı-ayrı elementlərini döndərməklə qurulma üsulu məlum olan yeni fiqur alınır.

c) Qurma məsələsinin həllində paralel köçürmə üsulu tətbiq edilərkən qurulması tələb olunan fiqurun ayrı-ayrı elementləri qurulma üsulu məlum olan yeni fiqur almaq məqsədi ilə paralel köçürülür.

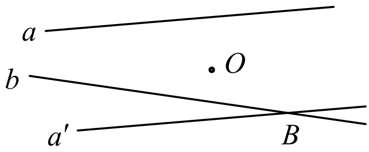
d) Qurma məsələsinin həllində oxşarlıq üsulu tətbiq edilərkən aşağıdakı mühakimə əsas götürülür: məsələnin şərtlərindən biri nəzərə alınmadıqda o qeyri-müəyyən məsələ olur və onun sonsuz sayda həlli olur. Bu zaman alınan fiqurlar bir-birinə oxşar olur. Ona görə də belə fiqurlardan birini qurub, uyğun oxşarlıq çevirməsi aparmaqla tələb olunan fiquru almaq olar.

e) Qurma məsələsinin həllində həndəsi yerlər üsulu tətbiq edilərkən aşağıdakı mühakimə əsas götürülür: qurulması tələb olunan fiqurun nöqtələri P_1 və P_2 xassələrinə malik olarsa, onda tələb olunan fiquru P_1 və P_2 xassəli nöqtələr çoxluqlarını ayrı-ayrılıqda qurub, sonra isə onların ortaq hissəsini tapmaqla qurmaq olar.

Simmetriya üsulu.

Məsələ. Orta nöqtəsi verilmiş O nöqtəsində, ucları isə verilmiş a və b düz xətləri üzərində olan AB parçasını qurmalı.

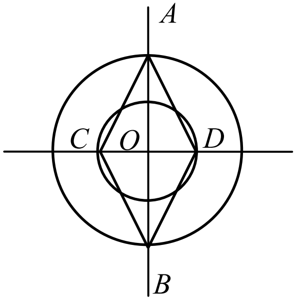
Həlli. Məsələnin şərtindən alınır ki, qurulması tələb olunan parça O nöqtəsinə nəzərən mərkəzi-simmetrik fiqurdur. Ona görə O nöqtəsinə nəzərən a ilə simmetrik olan a' düz xəttini qursaq, onda tələb olunan parçanın bir ucunu qurmuş olarıq. Bu nöqtə $a' \cap b = B$ nöqtəsi olar. Parçanın o biri ucunu qurmaq üçün B və O



nöqtələrindən keçən düz xətti qurmaq lazımdır; parçanın ikinci üc nöqtəsi bu düz xətlə a düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi olar.

Məsələ. Mərkəzi eyni nöqtədə olan iki çevrə verilmişdir. İki təpə nöqtəsi bu çevrələrdən birinin üzərində, qalan iki təpə nöqtəsi isə o biri çevrənin üzərində olan kvadrat olmayan rombu qurmalı.

Həlli. Radiusu böyük olan çevrənin AB diametrini çəkək.



Radiusu kiçik olan çevrənin AB düz xəttinə perpendikulyar olan CD diametrini çəksək, onda $ADBC$ dördbucaqlısı alınar. Göstərmək olar ki, $ADBC$ tələb olunan rombdur. Bu dörbucaqlının diaqonalları kəsişir və kəsişmə nöqtəsində hər biri yarıya bölünür. Ona görə $ADBC$ paraleloqramdır. Digər tərəfdən, $AD = DB = BC = CA$ olduğundan bu dörbucaqlı rombdur.

Dönmə üsulu.

Məsələ. Bir təpəsi verilmiş O nöqtəsində, qalan iki təpə nöqtəsi isə verilmiş iki çevrə üzərində olan bərəbərtərəfli üçbucağı qurmalı.

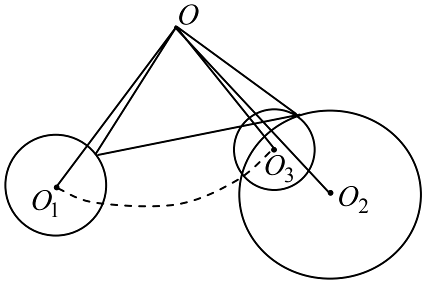
Həlli. Fərz edək ki, tələb olunan bərabərtərəfli üçbucaq qurulub. Onun bir təpəsi O_1 mərkəzli çevrə üzərində, ikinci təpəsi O_2 mərkəzli çevrə üzərində və üçüncü təpəsi verilmiş O nöqtəsindədir. Mərkəzi O_1 nöqtəsində, bucağı 60^o-ə bərabər olan dönmə çevirməsini aparaq. Onda mərkəzi O_3 nöqtəsində olan yeni çevrə alınar. Bu yeni çevrə mərkəzi O_2 nöqtəsində olan çevrə ilə aşağıdakı vəziyyətlərdə ola bilər:

a) bu çevrələr toxunar;

b) bu çevrələr kəsişər;

c) bu çevrələrin heç bir ortaq nöqtəsi olmaz.

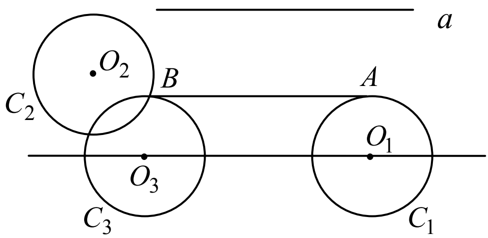
O_2 mərkəzli çevrə ilə O_3 mərkəzli çevrənin toxunma nöqtəsi və ya kəsişmə nöqtələrindən biri tələb olunan bərabərtərəfli üçbucağın ikinci təpəsi olar. Çevrələrin ortaq nöqtəsi olmadıqda məsələnin həlli olmur.



Paralel köçürmə üsulu.

Məsələ. C_1 və C_2 çevrələri və a düz xətti verilmişdir. Uc nöqtələri verilən çevrələr üzərində yerləşən və a düz xəttinə paralel olan d uzunluqlu parçanı qurmalı.

Həlli. Fərz edək ki, tələb olunan parça qurulmuşdur. C_1 çevrəsini d məsafəsi qədər a düz xəttinə nəzərən elə paralel köçürək ki, alınan C_3 çevrəsi C_2 çevrəsi ilə kəsişsin (əgər onlar kəsişməsə, onda məsələnin həlli olmur). Kəsişmə nöqtəsi tələb olunan parçanın bir ucu olur. O biri ucu tapmaq üçün B nöqtəsindən a düz

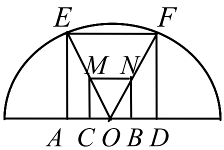


xəttinə paralel çəkilmiş düz xətt üzərində d -ə bərabər parça ayırmaq lazımdır.

Oxşarlıq üsulu.

Məsələ. Verilən dairə seqmenti daxilinə iki təpəsi seqmentin qövsü üzərində, digər iki təpəsi isə seqmentin oturacağı üzərində olan kvadrat qurmalı.

Həlli. Seqmentin oturacağı üzərində hər hansı bir kvadratın bir tərəfini elə yerləşdirək ki, seqmentin oturacağının orta nöqtəsi ilə kvadratın tərəfinin orta nöqtəsi üst-üstə düşsün. Bir tərəfi göstərilən qayda ilə qurulan kvadratlar bir-birinə oxşardır və onlardan yalnız biri tələb olunan kvadrat olar. Onu qurmaq üçün əvvəlcə, belə kvadratlardan birini qurmaq lazımdır. Şəkildə bu $CMND$ kvadratıdır.

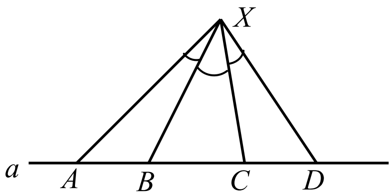


Sonra isə onun seqmentin oturacağındakı tərəfinin orta nöqtəsi ilə qarşı təpələri birləşdirən OM və ON şüalarını seqmentin qövsünü kəsənə qədər uzatmaq lazımdır. Onda EF parçası tələb olunan kvadratın tərəfi olar.

Həndəsi yerlər üsulu.

Məsələ. Düz xətt üzərində A, B, C və D nöqtələri verilmişdir. Verilən düz xəttin üzərində olmayan və $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXD$ şərtlərini ödəyən X nöqtəsini qurmalı.

Həlli. Fərz edək ki, tələb olunan X nöqtəsi qurulmuşdur. Onda XB parçası $\angle AXB$-in, XC parçası isə $\angle BXD$-in tənbölənləri



olduğundan $XA : XC = AB : BC$ və $XB : XD = BC : CD$ olur. Məlumdur ki, $XA : XC = AB : BC$ münasibətini ödəyən nöqtələr çoxluğu müəyyən çevrədir. $XB : XD = BC : CD$ münasibətini ödəyən nöqtələr çoxluğu da çevrə olduğundan, tələb olunan X nöqtəsi bu çevrələrin kəsişmə nöqtəsi olar.

§11. Kəmiyyətlər və onların ölçülməsinin öyrənilməsi metodikası

Kəmiyyət anlayışı bir neçə məktəb fənninin (riyaziyyat, fizika, kimya və s.) əsas anlayışlarından biridir. Buna baxmayaraq, təlim prosesində kəmiyyət anlayışından düzgün istifadə olunmur: «kəmiyyət» və «miqdar» anlayışları bir çox hallarda qarışdırılır. Bunun əsas səbəbləri kimi aşağıdakıları göstərmək olar:

a) kəmiyyət sırf riyazi anlayış deyildir;

b) kəmiyyət anlayışının daxil edilməsi və istifadə edilməsi metodik ədəbiyyatda kifayət qədər aydın şərh olunmamışdır.

Orta məktəblərdə kəmiyyətlərin öyrənilməsi prosesində aşağıdakı mərhələlər fərqləndirilir:

a) hazırlıq mərhələsi;

b) kəmiyyətlərin qiymətlərinin bilavasitə ölçmə aparmadan hesablanması metodlarının öyrənilməsi mərhələsi;

c) kəmiyyətlərin ölçülməsinin formal-məntiqi əsaslarının öyrənilməsi mərhələsi.

Birinci mərhələdə uzunluğun, kütlənin, temperaturun və s. bilavasitə ölçülməsi haqqında ilk təsəvvürlər formalaşdırılır və inkişaf etdirilir. Bu mərhələdə «adlı ədəd» termini işlədilir, onlar üzərində toplama, çıxma əməlləri aparmaq qaydaları öyrənilir, sadə ölçü vahidləri daxil edilir. Hazırlıq mərhələsində «adlı ədədlərin» natural ədədə vurulması qaydaları da öyrənilir. Bu mərhələdə ölçmə prosesinin formal-məntiqi əsasları araşdırılmır. Kəmiyyətlərin öyrənilməsi prosesində bu mərhələ I-VI sinifləri əhatə elir.

Kəmiyyətlərin öyrənilməsində ikinci mərhələ həndəsə kursunun sistemli şəkildə öyrənilməsi ilə başlanır. Bu mərhələdə parçanın uzunluğu, fiqurun sahəsi (həcmi) anlayışları daxil edilir, bilavasitə ölçmə aparmadan kəmiyyətlərin qiymətlirinin hesablanması metodları öyrənilir (məsələn, Pifaqor teoremi düzbucaqlı üçbucaqda məchul elementlərin qiymətlərini hesablamağa imkan verir).

Kəmiyyətin ölçülməsi prosesini kəmiyyətlər çoxluğunun müsbət ədədlər çoxluğuna inikası kimi təsvir etmək olar; hər bir şagirdin ədədlərin mənşəyi haqqında aydın təsəvvürü olmalıdır (ədədlər əşyaların sayılması və kəmiyyətlərin ölçülməsi prosesində meydana gəlmişdir).

VIII-IX sinif şagirdlərinin kəmiyyətlərin ölçülməsi haqqında aydın təsəvvürü olmalıdır. Kəmiyyətin ölçülməsi prosesi iki mərhələdən ibarət olur:

1) eyni növdən olan kəmiyyətlər çoxluğundan etalonun (ölçü vahidinin) seçilməsi;
2) verilən kəmiyyətin ölçü vahidi ilə müqayisə olunması.

Aparılan müqayisə nəticəsində müəyyən x ədədi tapılır. Bu ədəd a kəmiyyətinin e ölçü vahidində qiyməti adlanır:

$$a = x \cdot e.$$

Kəmiyyətin öyrənilməsi prosesində ikinci mərhələ VII-IX sinifləri əhatə edir.

Məktəb həndəsə kursunda uzunluq, sahə, həcm və s. kəmiyyətlərinin aksiomatik üsulla daxil edilməsi hələlik nəzərdə tutulmayıb.

Şagirdlər məktəb riyaziyyat kursunda öyrənilən kəmiyyətlər sistemindən əvvəlcə, sahə anlayışı ilə tanış olur. IV sinifdə şagirdlər düzbucaqlının sahəsini hesablamağı öyrənirlər. İlk vaxtlar onlar tərəflərinin uzunluqlarının ədədi qiymətləri eyni xətti ölçü vahidində natural ədədlərlə ifadə olunan düzbucaqlıların sahəsini hesablamağı öyrənirlər.

Sahə anlayışının formalaşdırılmasında praktik ölçmələrin əhəmiyyəti çox böyükdür. Praktik ölçmələrin aparılmasında palletdən istifadə etmək lazımdır. Pallet vasitəsilə müstəvi fiqurların sahəsinin hesablanması şagirdlərdə sahə anlayışı haqqında düzgün təsəvvür formalaşdırmaq imkanı yaradır.

Düzbucaqlının sahəsini hesablamaq üçün $S = ab$ (burada a və b düzbucaqlının tərəflərinin üzünluqlarıdır) düsturunu daxil edərkən qeyd etmək lazımdır ki, eyni cinsdən olan kəmiyyətləri toplamaq, çıxmaq olur; nəticədə həmin cinsdən olan kəmiyyətlər alınır. Lakin eyni cinsdən olan kəmiyyətləri vurmaq olmur. Düzbucaqlının sahəsini hesablamaq üçün $S = ab$ düsturundan istifadə edərkən $a = m \cdot e,\ b = n \cdot e$ (burada e-ölçü vahididir) olduğu nəzərdə tutulur və düzbucaqlının sahəsinin $m \cdot n$ sayda, tərəfi e-ə və bərabər olan kvadratların sahələri cəminə bərabər olduğu başa düşülür.

Düzbucaqlının sahəsini öyrəndikdən sonra qalan müstəvi fiqurlarının sahələrini öyrənmək metodik çətinliklər yaratmır.

Məktəb həndəsə kursunda sahə anlayışını aksiomatik üsulla daxil etmək imkanı vardır. Bunu aşağıdakı şəkildə etmək olar.

Fərz edək ki, seçilmiş e xətti ölçü vahidinə görə hər bir σ müstəvi fiquruna aşağıdakı şərtləri ödəyən yeganə $S(\sigma) = K(\sigma) \cdot e^2$ kəmiyyəti qarşı qoymaq olur:

1) $K(\sigma) \ge 0$;

2) əgər $\sigma_1 = \sigma_2$ olarsa, onda $K(\sigma_1) = K(\sigma_2)$;

3) əgər $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ və $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$ olarsa, onda
$K(\sigma) = K(\sigma_1) + K(\sigma_2)$;

4) elə σ_0 fiquru var ki, $K(\sigma_0) = 1$ olur;

5) əgər $\sigma_1 \subset \sigma_2$ olarsa, onda $K(\sigma_1) \le K(\sigma_2)$ olur.

Onda $S(\sigma)$ kəmiyyəti σ fiqurunun sahəsi adlanır.

Göstərilən tərifi verdikdən sonra qeyd etmək olar ki, sahəsi olan fiqur kvadratlaşdırıla bilən fiqur adlanır. Bu zaman qeyd etmək lazımdır ki, belə fiqurlara n-bucaqlıları, n-bucaqlardan düzəldilmiş fiqurları aid etmək olar.

Kəmiyyətlərin ölçülməsində inteqral hesabının metodlarından da istifadə olunur.

§12. Əyrinin uzunluğu

Fərz edək ki, bizə müstəvidə qapalı olmayan Γ əyrisinin

$$x=\varphi(t) \text{ və } y=\psi(t), \quad t_0 \le t \le T$$

(t_0 və T- qeyd edilmiş ədədlərdir) kimi parametrik şəkildə tənliyi verilib; $\varphi(t)$ və $\psi(t)$ funksiyalarının (t_0,T) intervalının hər bir nöqtəsində sonlu törəmələri var və $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)|$ funksiyaları $[t_0,T]$ parçasında cəmlənəndir. $[t_0,T]$ parçasını ixtiyari qayda ilə n hissəyə bölək:

$$t_0=t_0<t_1<t_2<...<t_n=T .$$

Γ əyrisi üzərində t_i-ci bölgü nöqtəsinə uyğun nöqtəni M_i ilə işarə etsək, bu nöqtənin koordinatları $M_i(\varphi(t_i),\psi(t_i))$ olacaq. Iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən, $[M_i,M_{i+1}]$ parçasının uzunluğu

$$\rho(M_i,M_{i+1})=\sqrt{(\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i))^2+(\psi(t_{i+1})-\psi(t_i))^2} \qquad (1)$$

olacaq. Laqranjın sonlu artım düsturuna əsasən,

$$\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\varphi'(\xi_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)=\varphi'(\xi_i)\cdot\Delta t_i,\ \xi_i\in(t_i,t_{i+1}) ;$$

$$\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)=\psi'(\eta_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)=\psi'(\eta_i)\cdot\Delta t_i,\ \eta_i\in(t_i,t_{i+1}) \qquad (2)$$

olacaq. (2) düstutunu (1)-də nəzərə alsaq,

$$\rho(M_i,M_{i+1})=\sqrt{\left(\varphi'(\xi_i)\right)^2+\left(\psi'(\eta_i)\right)^2}\cdot\Delta t_i, \qquad (3)$$

$$\xi_i,\ \eta_i\in(t_i,t_{i+1}), i=0,1,...,n-1.$$

Γ əyrisinin l uzunluğunun

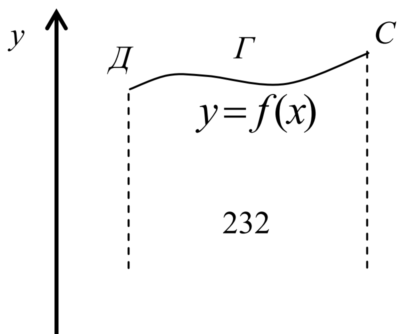
$$l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(M_i,M_{i+1}), \qquad (\lambda=\max\Delta t_i,\ i=0,1,...,n-1) \quad (4)$$

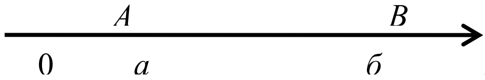
münasibətindən təyin olunduğunu bilərək, (3) və (4) düsturlarından asanlıqla tapırıq ki:

$$l=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\ dt. \qquad (5)$$

§13. Çevrənin uzunluğun hesablanması

Tutaq ki, $y=f(x)$ sonlu $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş həqiqi qiymətli kəsilməz funksiyadır, onun bu parçada sanki hər yerdə sonlu $f'(x)$ törəməsi var və $|f'(x)|$ funksiyası $[a,b]$ parçasında cəmlənəndir. Onda $x\in[a,b]$ olduqda, $(x,f(x))$ nöqtələrinin həndəsi yerinin təyin etdiyi Γ





Шякил 1.

(şəkil 1) əyrisinin uzunluğu C aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \,. \qquad (1)$$

(1) düsturundan istifadə edərək R radiuslu çevrənin C uzunluğunu hesablayaq. Ümumiliyi pozmadan çevrənin mərkəzini koordinat başlanğıcında götürmək olar. Onda çevrənin tənliyi $x^2 + y^2 = R^2$ şəklində olacaq. I rübdə çevrənin tənliyi $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \le x \le R$ olur. Beləliklə, (1) düsturuna əsasən, çevrənin C uzunluğunun $1/4$-i üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\frac{C}{4} = \int_0^R \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\, dx \,, \qquad (2)$$

buradan

$$\frac{C}{4} = \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^R \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \int_0^R \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \,.$$

Axırıncı inteqralda $x = Rt$ əvəzləməsi aparsaq, alarıq ki,

$$\frac{C}{4} = \int_0^R \frac{R \cdot R\,dt}{\sqrt{R^2 - R^2 t^2}} = R\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \,,$$

Buradan isə alırıq:

$$C = D \cdot \pi \;, \tag{3}$$

burada C- radiusu R olan çevrənin uzunluğu, D-bu çevrənin diametri, yəni $D = 2R$, π -simvolik olaraq, aşağıdakı ədədin yazılışıdır:

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} . \tag{4}$$

(3) düsturundan belə bir nəticə çıxır.

Nəticə. Çevrənin uzunluğunun öz diametrinə nisbəti (4) düsturu ilə təyin olunan sabit kəmiyyətdir, yəni bu nisbət çevrənin radiusundan asılı deyil. (4) düsturu ilə təyin olunan π ədədi irrasional ədəddir; inteqral üçün təqribi hesablama düsturlarını (4)-ə tətbiq etməklə, π -nin qiymətini ixtiyari dəqiqliklə hesablamaq olur və bu ədəd $\pi = 3{,}14...$ -dir. Tutaq ki,

$$S_n = \frac{2}{n}\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}} \right\}, n = 1,2,3,..., \qquad (5),$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad . \tag{6}$$

(5) düsturundan istifadə etməklə, π -nin ədədi qiymətini istənilən dəqiqliklə tapmaq olar.

§14. Həcmin hesablanması

Biz müstəvi çoxbucaqlıların köməyi ilə istənilən müstəvi fiqurun sahəsi analışını təyin edirdik. Analoji qayda ilə çoxüzlülərin həcmi vasitəsi ilə fəza cisimlərinin həcmi anlayışı verilir. Tutaq ki, üçölçülü fəzada ixtiyari formada *(v)* cismi verilib. Başqa sözlə, üçölçülü fəzada məhdud, qapalı *(v)* oblastı verilib. Tamamilə *(v)* cisminin daxilində yerləşən çoxüzlülər çoxluğunu *(x)* və uyğun olaraq, onların həcmləri çoxluğunu x ilə, analoji olaraq, *(v)* cismini tamamilə öz daxilinə alan çoxüzlülər çoxluğunu *(y)* və uyğun olaraq, onların həcmləri çoxluğunu y ilə işarə edək. x çoxluğu yuxarıdan məhdud olduğu üçün onun dəqiq yuxarı sərhəddi və y çoxluğu aşağıdan məhdud olduğu üçün onun dəqiq aşağı sərhəddi var. Tutaq ki:

$$v_* = \sup\{x\}; \qquad v^* = \inf\{y\}. \tag{1}$$

Aydındır ki, $v_* \leq v^*$ dir. v_* və v^*-a uyğun olaraq, *(v)*- cisimlərinin daxili və xarici həcmi deyilir.

Tərif 1. Əgər

$$v_* = v^* \tag{2}$$

isə, onda deyirlər ki, *(v)*- cisminin həcmi var və v $= v_* = v^*$ kəmiyyətinə bərbərdir.

(1) və (2) düsturlarından çıxır ki, *(v)* cisminin həcminin olması üçün zəruri və kafi şərt odur ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə, elə *(x)* (daxili) və *(y)* (xarici) çoxüzlüləri olmalıdır ki, onlar üçün

$$y - x < \varepsilon \tag{3}$$

bərabərsizliyi doğru olsun. Yuxarıdakı mühakimələrdən aydındır ki, *(v)* cismi kəsişməyən *(v_1) və (v_2)* cisimlərinin birləşməsindən ibarətdirsə və bu cisimlərdən hər hansı ikisinin həcmi varsa, onda üçüncü cismin də həcmi var və onların arasında

$$v = v_1 + v_2 \tag{4}$$

bərabərliyi doğrudur.

Cisimlərin həcmi üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1. *(v)* cisminin həcminin olması üçün zəruri və kafi şərt həmin cismə tamamilə daxil olan $\{(x_n)\}$ çoxüzlülülər ardıcıllığı və bu cismi tamamilə öz daxilinə alan elə $\{(y_n)\}$ çoxüzlülülər ardıcıllığının olmasıdır ki, onlar üçün $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ədədi ardıcıllıqları yığılsın və aşağıdakı bərabərlik doğru olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n . \tag{5}$$

Zəruriliyin isbatı. Tutaq ki, *(v)* cisminin *v* həcmi var. Onda teoremdə göstərilən $\{(x_n)\}$ və $\{(y_n)\}$ çoxüzlülülər ardıcıllığının mövcudluğunu isbat edək. 0-a yığılan istənilən müsbət ε_n ədədlər ardıcıllığını götürək. Hər bir ε_n ədədi üçün (3) bərabərsizliyinə əsasən, elə $\{x_n\}$(daxili) və $\{y_n\}$ (xarici) çoxüzlülüləri olacaq ki, onlar üçün

$$0 \le y_n - x_n < \varepsilon_n \tag{6}$$

bərabərsizliyi doğru olsun. (6)-dan alırıq ki:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Kafiliyin isbatı. Tutaq ki, (5) bərabərliyini ödəyən $\{(x_n)\}$ (daxili) və $\{(y_n)\}$ (xarici) çoxüzlülülər ardıcıllığı var. Onda aydındır ki, istənilən n nömrəsi üçün

$$x_n \le v_* \le v^* \le y_n . \tag{7}$$

(7) bərabərsizliklər sistemində limitə keçsək və (5) bərabərliyini nəzərə alsaq, $v_* = v^*$ olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

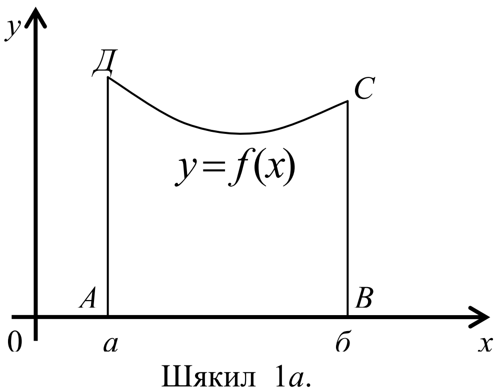
Dairənin sahəsinin hesablanmasında olduğu kimi, analoji qayda ilə çoxüzlülülərin həcmi vasitəsi ilə düz silindrin V həcmi üçün alırıq:

$$V = \pi R^2 H , \tag{8}$$

burada R -silindrin oturacağının radiusu, H isə onun hündürlüyüdür.

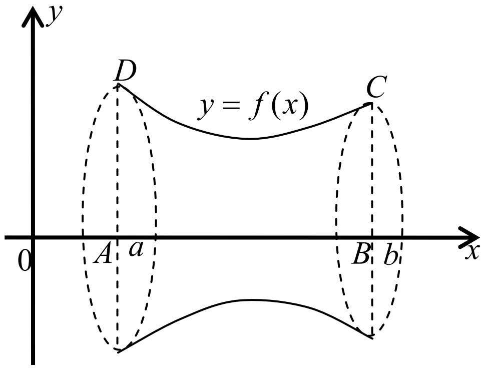
§15. Fırlanma cisimlərinin həcmi

Tutaq ki, üçölçülü $X0YZ$ dekart koordinat fəzasının $X0Y$ müstəvisində $y = f(x)$, $a \le x \le b$ münasibəti ilə təyin olunan əyri xətt verilmişdir, burada a və b müəyyən ədədlərdir, $f(x)$ isə $[a,b]$



Шякил 1a.

parçasında təyin olunmuş kəsilməz və mənfi olmayan funksiyadır (şəkil 1a). Bu əyrinin əmələ gətirdiyi $ABCD$ əyrixətli trapesiyasının (yəni *XOY* müstəvisində *x=a, x=b, y=0* düz xətləri və *y=f(x)* düsturu ilə verilən əyri ilə hüdudlanmış müstəvi oblast) *OX* oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismi *(v)* ilə işarə edək



Шякил 1б.

(şəkil 1b).Bu cismin həcmini hesablayaq. $[a,b]$ parçasını ixtiyari qayda ilə *n* hissəyə bölək:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b.$$

$[x_i, x_{i+1}]$ parçasında *f(x)* funksiyasının ən böyük qiymətini M_i ilə, ən kiçik qiymətini isə m_i ilə işarə edək. *f(x)* funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz olduğu üçün elə $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ və $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nöqtələri var ki, onlar üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$m_i = f(\xi_i),\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}];\ M_i = f(\eta_i),\ \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]. \qquad (9)$$

Oturacağının mərkəzi *OX* oxunun x_i nöqtəsində, hündürlüyü $[x_i, x_{i+1}]$ parçası və oturacağının radiusu m_i (M_i) olan düz silindri

(o_i), $((o_i))$ ilə işarə edək. Bu düz silindrlərin birləşmələrindən aşağıdakı şəkildə təşkil olunmuş (x_n) və (v_n) cisimlərinə baxaq:

$$
\begin{aligned}
(x_n) &= \bigcup_{i=0}^{n-1} (o_i), \\
(v_n) &= \bigcup_{i=0}^{n-1} (o_i).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Aydındır ki, (x_n) cismi tamamilə (v) ciminin daxilində və eləcə də (v) cisminin özü (v_n)cisminin daxilində yerləşir. (4) və (8) düsturlarına əsasən, (x_n) və (v_n) cisimlərinin həcmi üçün aşağıdakı düsturları alırıq:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 \Delta x_i \\
v_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2 \Delta x_i \, ,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Deməli, (7), (9), (11) düsturlarına əsasən alırıq ki,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i \le v_* \le v^* \le \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(\eta_i)]^2 \Delta x_i \tag{12}$$

f(x) funksiyası kəsilməz olduğu üçün

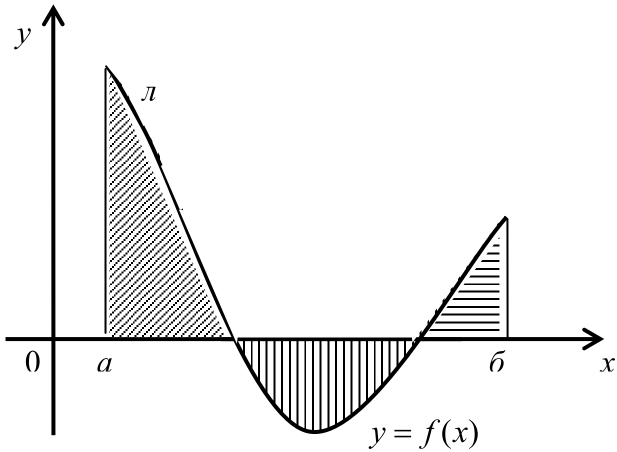
$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(\eta_i)]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \tag{13}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\lambda_n = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$. (12) və (13) düsturlarından çıxır ki, (v) cisminin v həcmi var və bu həcm aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$v = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx . \qquad (14)$$

Qeyd. Yuxarıda şərh olunan mühakimələrdən aydındır ki, *f(x)* funksiyası mənfi olduqda da (14) düsturu öz qüvvəsində qalır. Bu isə bizə aşağıdakı şəkildə ümumi teorem söyləməyə imkan verir.

Teorem 2. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır (müsbət və ya mənfi olma şərti qoyulmur). *XOY* müstəvisində *x=a, x=b, y=0* düz xətləri və $y = f(x)$ düsturu ilə verilən *l* əyrisi ilə



Шякил 2.

hüdudlanmış müstəvi oblastının (2-ci şəkildə bu oblast ştrixlənmişdir) *OX* oxu ətrafında fırlanmasından alınan (v) fırlanma cisminin həcmi var və bu həcm (14) düsturu ilə hesablanır. (14) düsturunun tətbiqinə aid aşağıdakı məsələləri həll edək.

Məsələ 1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

Həlli. Ellipsin tənliyindən alırıq ki: $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$. Tələb olunan fırlanma cisminin həcmi:

$$v=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

olur.

Məsələ 2. $x=0, x=1, y=0$ düz xətləri və $y=1+x^2$ parabolasının təyin etdiyi əyri ilə hüdudlanmış müstəvi fiqurun OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan fırlanma cisminin həcmi

$$v=\pi\int_{0}^{1}y^2dx=\pi\int_{0}^{1}\left(1+x^2\right)^2dx=\pi\int_{0}^{1}\left(1+2x+x^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{28}{15}\pi$$

olur.

Məsələ3. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ (0 \le t \le 2\pi)$ parametrik şəkildə verilmiş əyrinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

Həlli. $x = a(t - \sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ münasibətindən çıxır ki, $0 \le x \le 2\pi a$ və $dx = a(1 - \cos t)dt$ olur. (14) düsturuna əsasən tələb olunan cismin həcmi

$$v = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx$$

olur. Buradan

$$v = \pi \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t)dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 4\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin^2 t \cos t \right)dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t \sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3$$

olduğunu tapırıq.

§16. Fırlanma cisimlərinin səthinin sahəsi

Tutaq ki, F verilmiş səthdir. Üçölçülü fəzanın bütün elə nöqtələrindən ibarət F_h cismini nəzərdən keçirək ki, bu nöqtələrin hər biri üçün F səthinin bu nöqtədən məsafəsi h-dan böyük olmayan nöqtəsi tapılsın. v_h ilə F_h cisminin həcmini işarə edək. Fərz edək ki, $h \to 0$ *olduqda* $v_h/(2h)$ nisbətinin limiti var.

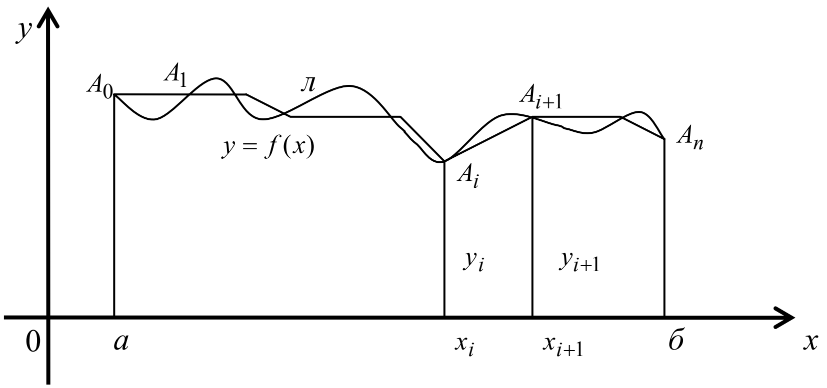
Tərif 2. $v_h/(2h)$ nisbətinin $h \to 0$ *olduqda* limitinə F səthinin S sahəsi deyilir, yəni

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{v_h}{2h}. \tag{1}$$

Bu tərifin köməyi ilə kəsik konusun (silindrin) yan səthinin sahəsi üçün

$$S = \pi(r + R)l \tag{2}$$

düsturu alınır, burada r və R kəsik konusun (silindrin) oturacaqlarının



Шякил 3.

radiusları, l- isə onun doğuranının uzunluğudur. Indi biz bu düsturlardan istifadə edərək, fırlanma cisimlərinin səthinin sahəsi üçün düstur alaq. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunub və müsbətdir (şəkil 3). Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında birinci tərtib kəsilməz törəməsi var. Bu şərtdən çıxır ki,

$f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və diferensiallanandır. $y = f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasındakı qrafikinin təyin etdiyi əyri xətti *l* ilə işarə edək. *l* xəttinin *OX* oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin *S* sahəsini hesablayaq. Bunun üçün $[a,b]$ parçasını ixtiyari qayda ilə *n* hissəyə bölək:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

l əyrisi üzərində $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ nöqtələrini qeyd edək, belə ki:

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, \ldots, n \tag{3}$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ nöqtələrinin ardıcıl olaraq düz xətt parçaları ilə birləşməsindən əmələ gələn sınıq xətti l_n ilə işarə edək. A_i və A_{i+1} nöqtələrini birləşdirən parçanın uzunluğu l_i olsun. Əvvəlcə *l* xəttinin *OX* oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin S_n sahəsini hesablayaq. Qeyd edək ki, bu fırlanma səthi *n-1* sayda kəsik konusların (yaxud silindirlərin) yan səthlərindən təşkil olunub. (2) düsturuna əsasən $[A_i, A_{i+1}]$ parçasının OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi $\pi(y_i + y_{i+1})l_i$ -dir. Deməli, l_n xəttinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi(y_i + y_{i+1})l_i \tag{4}$$

düsturu ilə təyin olunacaq. Pifaqor teoreminə görə l_i uzunluğu üçün

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \tag{5}$$

bərabərliyini alırıq, burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

(3) və (5) bərabərliklərini (4) –də nəzərə alsaq,

$$S_n = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} =$$

$$= 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x_i \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i} \right]^2} \qquad (6)$$

olar. Laqranjın sonlu artım düsturuna görə

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i} = f^{(i)}(\theta_i), \theta_i \in (x_i, x_{i+1}), \qquad (7)$$

burada θ_i nöqtəsi (x_i, x_{i+1}) intervalına daxil olan müəyyən bir nöqtədir. Kəsilməz funksiya özünün ən böyük və ən kiçik qiymətləri arasındakı bütün qiymətləri aldığına görə $[x_i, x_{i+1}]$ parçasına daxil olan elə bir θ_i^* nöqtəsi var ki, onun üçün

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = f(\theta_i^*) , \ \theta_i^* \in [x_i, x_{i+1}] \qquad (8)$$

bərabərliyi doğrudur. (7) və (8) bərabərliklərini (6)-da nəzərə alsaq,

$$S_n = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\theta_i^*) \sqrt{1 + [f^{(i)}(\theta_i)]^2} \Delta x_i = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} \qquad (9)$$

olacaq, burada

$$S_n^{(1)} = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\theta_i) \sqrt{1 + [f^{(i)}(\theta_i)]^2} \Delta x_i \qquad (10)$$

$$S_n^{(2)} = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} [f(\theta_i^*) - f(\theta_i)] \sqrt{1 + [f^{(i)}(\theta_i)]^2} \Delta x_i . \qquad (11)$$

$f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və θ_i^*, θ_i nöqtələrinin hər ikisi eyni bir $[x_i, x_{i+1}]$ parçasına daxil olduğu üçün istənilən müsbət ε ədədi verildikdə elə bir müsbət δ ədədi tapmaq olar ki,

$$\Delta x_i < \delta, i = 0,...,n-1 \tag{12}$$

olduqda $\left|f(\theta_i^*) - f(\theta_i)\right| < \varepsilon,\ i = 0,...,n-1$ olsun. Beləliklə, (12) şərti daxilində S_n^2 üçün (11) düsturundan aşağıdakı qiymətləndirilmə alınar:

$$\left|S_n^{(2)}\right| \le 2\pi\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left[f^{(i)}(\theta_i)\right]^2}\,\Delta x_i \tag{13}$$

$\lambda_n = \max\limits_{0 \le 1 \le n-1} \Delta x_i$ ədədi 0-a yaxınlaşdıqda (10) və (13) düsturlarından alırıq ki:

$$\lim_{\lambda_n \to 0} S_n^{(1)} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f^{(i)}(x_i)\right]^2}\,dx\ , \tag{14}$$

$$\overline{\lim_{\lambda_n \to 0}} \left|S_n^{(2)}\right| \le 2\pi\varepsilon \int_a^b \sqrt{1 + \left[f^{(i)}(x_i)\right]^2}\,dx\,. \tag{15}$$

(15) bərabərsizliyində ε ixtuyari müsbət ədəd olduğu üçün

$$\lim_{\lambda_n \to 0} S_n^{(2)} = 0 \tag{16}$$

bərabərliyini alırıq. (14) və (16) bərabərliklərini (9) düsturunda nəzərə alsaq,

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f^{(i)}(x_i)\right]^2}\,dx \tag{17}$$

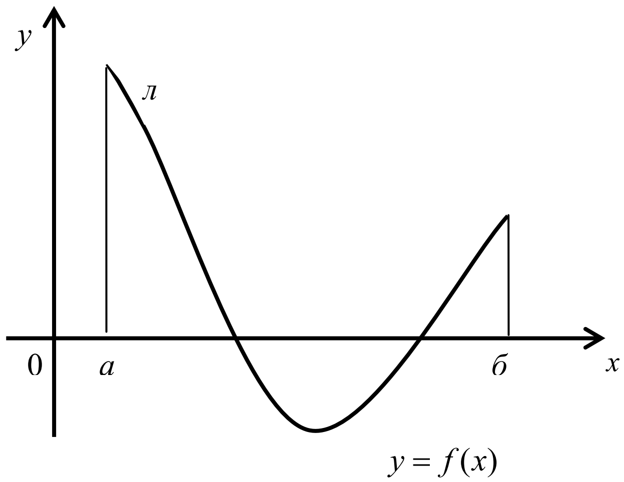
olduğunu tapırıq, yəni l xəttinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi üçün (17) düsturunu alırıq.

Qeyd. Yuxarıda şərh olunan mühakimələrdən aydındır ki, $f(x)$ funksiyası mənfi olduqda fırlanma səthinin sahəsi

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\left[f^{(i)}(x_i)\right]^2}\,dx \tag{18}$$

olar, bu isə bizə aşağıdakı şəkildə ümumi teoremi söyləməyə imkan verir.

Teorem 3. Tutaq ki, *y=f(x)* funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır (funksiyanın müsbət və ya mənfi olması şərti qoyulmur, şəkil 4) və onun bu parçada birinci tərtib kəsilməz törəməsi



Шякил 4.

var. *y=f(x)* funksiyasının $[a,b]$ parçasında təyin etdiyi əyri xətti l ilə işarə edək. Onda l xəttinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi var və bu sahə (18) düsturu ilə hesablanır.

(18) düsturunun tətbiqinə aid aşağıdakı məsələləri həll edək.

Məsələ 1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a \geq b)$ ellipsinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

Həlli. Ellipsin tənliyindən alırıq ki:

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2; \qquad y\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}x;$$

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}= \tag{19}$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2},$$

burada

$$\varepsilon^2=(a^2-b^2)\ /a^2 .$$

Beləliklə, (17) düsturuna əsasən fırlanma səthinin sahəsi üçün aşağıdakı düsturu alırıq:

$$S=2\pi\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx=$$

$$=4\pi\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}=4\pi\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=2\pi\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+a^2\arcsin\varepsilon\right).$$

Deməli, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a \geq b)$ ellipsinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi

$$S = 2\pi \frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2 a^2}+a^2 \arcsin\varepsilon\right)$$

düsturu ilə hesablanır. Əgər *a=b=R* isə, onda (19) bərabərliyindən alırıq ki,

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = R \text{ - } dir.$$

Deməli, *a=b=R* olan halda

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R} Rdx = 4\pi\int_0^R Rdx = 4\pi Rx\Big|_0^R = 4\pi R^2$$

Beləliklə: Əgər *a=b=R* isə, yəni ellips radiusu *R* olan çevrə isə, onda bu çevrənin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan *R* radiuslu sferanın sahəsi $S = 4\pi R^2$ -a bərabərdir.

Məsələ 2. Tutaq ki, *l* əyrisi $y = \sin x$ funksiyasının $x \in [0, \pi]$ parçasında qrafikidir. Bu əyrinin *OX* oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

Həlli. Məsələnin şərtinə görə $a = 0,\ b = \pi,\ f(x) = \sin x,$ $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ olduğu üçün (17) düsturuna əsasən, tələb olunan səthin sahəsi

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

olur.

Buradan alırıq ki,

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (-\cos x)^2}\, d(-\cos x) = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt =$$

$$= 4\pi \int_0^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt. \qquad (20)$$

Bilavasitə yoxlamaqla asanlıqla inanmaq olar ki,

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{2} t \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) + c \qquad (21)$$

bərabərliyi doğrudur, burada c –ixtiyari sabitdir. (21) bərabərliyini (20) – də nəzərə alsaq,

$$S = 4\pi \left[\frac{1}{2} t \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) \right] \Bigg|_0^1 = 2\pi \left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \right]$$

olduğunu tapırıq, yəni l əyrisinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi $2\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$-ə bərabərdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Ümumtəhsil məktəblərinin V-XI sinifləri üçün riyaziyyat proqramları. Bakı, 2002.
2. B.Ə.Ağayev. Riyaziyyatın tədrisi metodikası. Bakı, 1961.
3. B.Ə.Ağayev. Səkkizillik məktəbdə riyaziyyatın tədrisi metodikası. I və II h. Bakı, 1972.
4. A.S.Adıgözəlov, T.M.Əliyeva. Orta məktəbdə riyaziyyatın tədrisi metodikası. Ümumi metodika. I və II h. Bakı, 1993.
5. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. М., 1975.
6. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. М., 1977.
7. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. М., 1985.
8. В.И.Мишин. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика. М., 1987.
9. М.П.Лапчик и др. Методика преподавания информатики. М., 2001.
10. А.А.Столяр. Педагогика математики. 2-е изд. Минск, 1974.

11. Xudaverdiyev K.İ.,Tahirov B.Ö., Abdullayeva Q.Z. Şagirdlərdə qrafik bilik, bacarıq və vərdişlərin formalaşdırılması. Metodik vəsait, Bakı, 2000.

MÜNDƏRİCAT