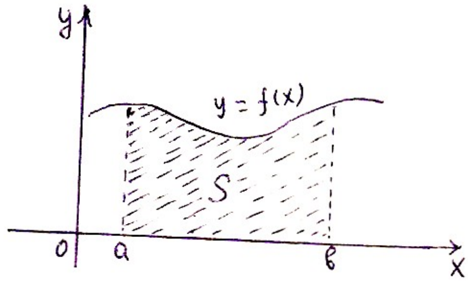
Əyrixətli trapesiyanın sahəsinə aid çalışmalar həlli

Rafiq Quliyev
Tovuz rayonu, Aşağı Mülkülü kənd orta məktəbin müəllimi

Tutaq ki, $[a;b]$ parçasında mənfi olmayan, kəsilməz $f(x)$ funkaiyası verilmişdir.Koordinatları $a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$ bərabərsizliklərini ödəyən nöqtələr çoxluğunun əmələ gətirdiyi müstəvi əyrixətli trapesiya adlanır (şəkil 1).



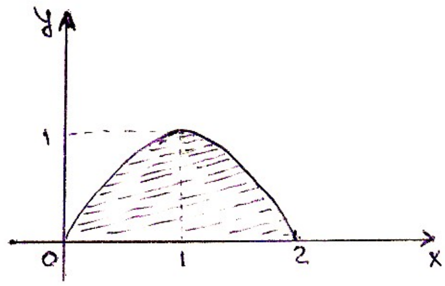
şəkil 1.

$[a;b]$ parçasında $f(x) \ge 0$ olarsa, onda uyğun əyrixətli trapesiyanın S sahəsi

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

düsturu ilə tapılır.

Misal1. $y = 2x - x^2, y = 0$ xətləri ilə məhdud olan fiqurun sahəsini hesablayın(şəkil 2).



şəkil 2.

Həlli. $2x - x^2 = 0$ tənliyini həll edib, $y = 2x - x^2$ parabolasının Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absislərinin $x_1 = 0$ və $x_2 = 2$ olduğunu müəyyən edirik. (1) düsturundan istifadə etsək, alarıq.

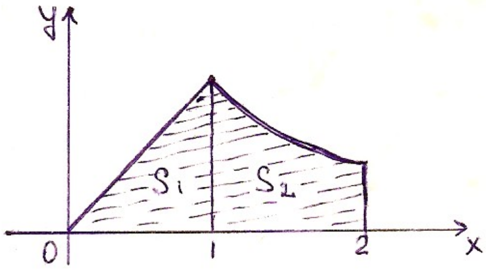
$$S = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Misal 2. $y = \frac{1}{x}, y = x, y = 0$ və $x = 2$ xətləri ilə məhdud olan fiqurun sahəsini hesablayın.

Həlli.Verilən fiquru $x = 1$ düz xətti ilə iki hissəyə ayıraq (şəkil 3).

Sahəsi S_1 olan hissə $[0;1]$ aralığında $y = x, S_2$ olan hissə isə $[1;2]$ aralığında $y = \frac{1}{x}$ funksiyalarının qrafikləri ilə məhdud olan əyrixətli trapesiyadır.(1) düsturundan istifadə etsək,

$$S_1 = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 0{,}5; S_2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = ln\,x\Big|_1^2 = ln\,2$$

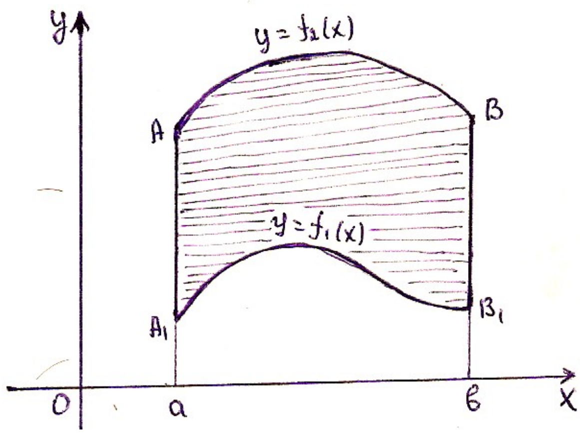


şəkil 3.

alarıq.Buradan isə,

$$S = S_1 + S_2 = 0{,}5 + ln\,2.$$

$[a;b]$ parçasında mənfi olmayan, kəsilməz, $f_1(x) \le f_2(x)$ şərtini ödəyən $f_1(x)$ və $f_2(x)$ funksiyalarının qrafikləri,



$x = a$ və $x = b(a \prec b)$ düz xətləri ilə əhatə olunmuş fiqura baxaq (şəkil 4).Bu fiqurun sahəsi $aABb$ və aA_1B_1b əyrixətli trapesiyalarının sahələri fərqinə bərabər olacaq.

şəkil 4.

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (2)$$

Ümumi halda aşağıdakı qanunauyğunluğu söyləmək olar.

Nöqtələrinin koordinatları $a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x),$ burada $f_1(x)$ və $f_2(x)$ -verilmiş kəsilməz funksiyalardır, bərabərsizliklərini ödəyən fiqurun S sahəsi

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (3)$$

düsturu ilə hesablanır.

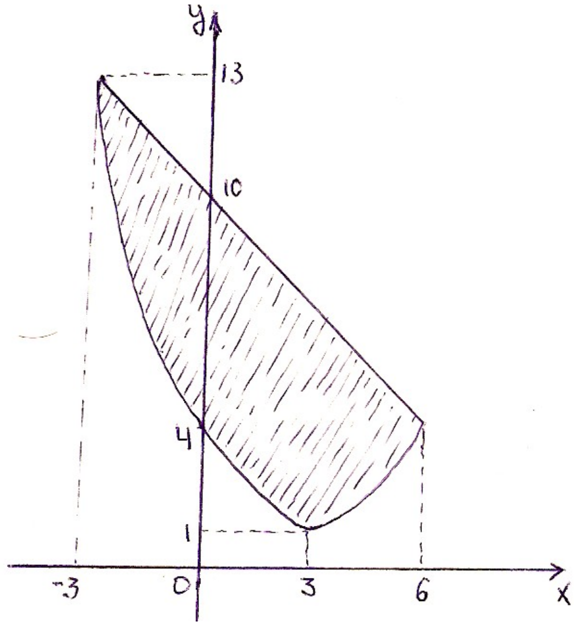
Doğrudan da, tutaq ki, $m - f_1(x)$ funksiyasının $[a;b]$ parçasında ən kiçik qiymətidir.Onda istənilən $x \in [a;b]$ üçün $f_2(x) - m \ge f_1(x) - m \ge 0.$ Koordinatları

$$a \le x \le b, f_1(x) - m \le y \le f_2(x) - m,$$

bərabərsizliklərini ödəyən fiqur, verilən fiqurun Oy oxu boyunca paralel köçürülməsindən alınır.Beləliklə, onların sahələri bərabərdir və ona görə ((2) düsturuna bax)

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - m - f_1(x) + m\right)dx = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

Misal 3. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4,\ y = 10 - x$ xətləri ilə əhatə olunan fiqurun sahəsini hesablayın (şəkil 5).



şəkil 5.

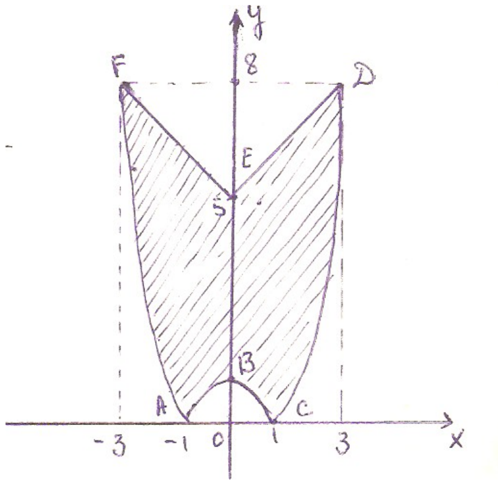
Həlli. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$ və $y = 10 - x$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq.Bunun üçün $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 10 - x$ tənliyini həll edək.

$\frac{1}{3}x^2 - x - 6 = 0$ kvadrat tənliyindən $x_1 = -3, x_2 = 6$ tapırıq.Axtarılan fiqurun sahəsini (3) düsturunun köməyi ilə tapırıq:

$$S = \int_{-3}^{6}\left(10 - x - \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4\right)\right)dx = \int_{-3}^{6}\left(-\frac{1}{3}x^2 + x + 6\right)dx = \left(-\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-3}^{6} = 40{,}5.$$

Misal 4. $y = \left|x^2 - 1\right|$ və $y = 5 + |x|$ xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın.

Həlli. $y = \left|x^2 - 1\right|$ və $y = 5 + |x|$ funksiyalarının qrafiklərini quraq.Şəkil 6-dan görünür ki, ABCDEF fiqurunun sahəsini tapmaq lazımdır. $\left|x^2 - 1\right| = 5 + |x|$ tənliyindən verilən xətlərin D və F kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapaq. Asanlıqla müəyyən etmək olar ki $D(3;8), F(-3;8)$. Şəkil 6-dan görünür ki, istənilən $x \in]-3;3[$ üçün $\left|x^2 - 1\right| \prec 5 + |x|$ və verilən fiqur Oy oxuna nəzərən simmetrikdir.Beləliklə,



şəkil 6.

$S = 2S_{\Delta CDE}$. (2) düsturuna əsasən,

$$S_{\Delta CDE} = \int_0^3 \left(5 + |x| - \left|x^2 - 1\right|\right)dx.$$

Asanlıqla tapmaq olar ki,

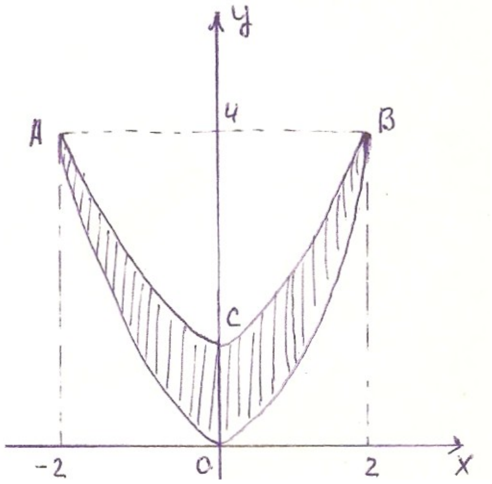
$$\int_0^3 \left(5 + |x|\right)dx = \int_0^3 5dx + \int_0^3 xdx = 5x\Big|_0^3 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = 15 + \frac{9}{2} = \frac{39}{2},$$

$$\int_0^3 \left(\left|x^2 - 1\right|\right)dx = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)dx + \int_1^3 \left(x^2 - 1\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \frac{22}{3}.$$

Beləliklə, $S = 2\left(\frac{39}{2} - \frac{22}{3}\right) = 2 \cdot \frac{73}{6} = \frac{73}{3}$.

Misal 5. $y = x^2$ və $y = 1 + \frac{3}{4}x^2$ xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.

Həlli. $y = x^2$ və $y = 1 + \frac{3}{4}x^2$ funksiyalarının qrafiklərini quraq (şəkil 7).



şəkil 7.

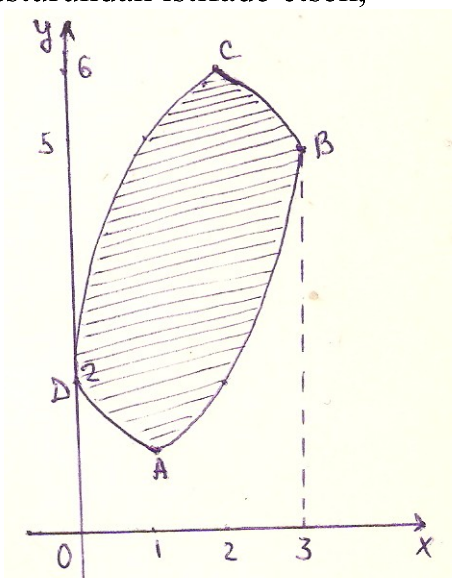
$x^2 = 1 + \frac{3}{4}x^2$ tənliyini həll edib, A və B kəsişmə nöqtələrinin absislərinin uyğun olaraq $x = -2$ və $x = 2$ olduğunu müəyyən edirik.Axtarılan fiqurun sahəsinin Oy oxuna nəzərən simmetrik olduğunu nəzərə alsaq və (2) düsturundan istifadə etsək, alarıq:

$$S = 2S_{DBC} = 2\cdot\int_0^2\left(1 + \frac{3}{4}x^2 - x^2\right)dx = 2\cdot\int_0^2\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)dx = 2\left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^2 = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Misal 6. $y = x^2 - 2x + 2$ və $y = 2 + 4x - x^2$ xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.

Həlli. $y = x^2 - 2x + 2$ xətti təpə nöqtəsi $A(1;1)$, $y = 2 + 4x - x^2$ xətti isə təpə nöqtəsi $C(2;6)$ olan paraboladır (şəkil 8).

$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = 2 + 4x - x^2 \end{cases}$ sistemini həll edib, parabolaların B və D kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapaq.Buradan $B(3;5)$ və $D(0;2)$ olduğunu asanlıqla müəyyən etmək olar.Beləliklə, tələb olunan fiqurun sahəsini tapmaq üçün ABCD fiqurunun sahəsini tapmaq lazımdır. (3) düsturundan istifadə etsək,

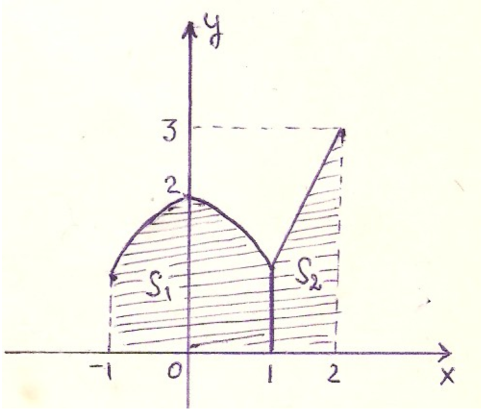


şəkil 8.

$$S = \int_0^3\left(\left(x^2 - 2x + 2\right) - \left(2 + 4x - x^2\right)\right)dx = \int_0^3\left(-2x^2 + 6x\right)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right)\Bigg|_0^3 = 9.$$

Əgər daha mürəkkəb fiqurun sahəsini tapmaq tələb olunursa, bu fiquru bir neçə fiqurlara ayırıb, (1)-(3) düsturlarının köməyi ilə hər birinin sahəsini hesablamaq olar.Sonra isə bu fiqurların sahələrini toplamaq lazımdır.

Misal 7. $x = -1, x = 2, f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, x \le 1 \\ 2x - 1, x \succ 1 \end{cases}$ xətləri və absis oxu ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.



şəkil 9.

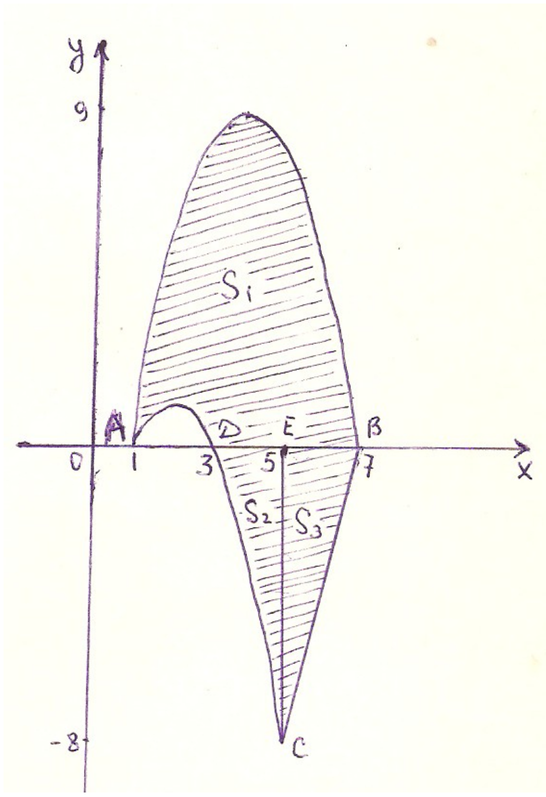
Həlli.Sahəsi axtarılan fiquru quraq (şəkil 9).
Bu fiquru $x = 1$ düz xətti vasitəsilə sahələri S_1 və S_2 olan iki hissəyə ayıraq.Sahəsi S_1 olan fiqurun Oy oxuna nəzərən simmetrik olmasından və (1) düsturundan istifadə etsək, alarıq.

$$S_1 = 2\int_0^1 \left(-x^2+2\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_0^1 = 2\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{3},$$

$$S_2 = \int_1^2 \left(2x-1\right)dx = \left(x^2-x\right)\Big|_1^2 = 2.$$

Belılıklə, $S = S_1 + S_2 = \dfrac{16}{3}.$

Misal 8. $y = -x^2+8x-7, y = -x^2+4x-3, y = 4x-28$ xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.



şəkil 10.

Həlli.Tələb olunan fiquru quraq (şəkil 10).A,B,D nöqtələri verilən parabolaların Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələridir.Bu nöqtələrin absislərini tapmaq üçün $-x^2+8x-7=0$ və $-x^2+4x-3=0$ tənliklərini həll edək.Birinci tənliyin kökləri $x=1$ və $x=7,$ ikinci tənliyin kökləri isə $x=1$ və $x=3$ ədədləridir.Beləliklə, $x_A=1, x_B=7, x_D=3.$
C nöqtəsinin absisini tapmaq üçün $-x^2+4x-3=4x-28$ tənliyini həll edək.Buradan $x=\pm 5.$ Deməli, $x_C=5.$ Verilən fiquru $[DB]$ və $[AC]$ parçaları ilə üç fiqura ayıraq və şəkil 10-da göstərildiyi kimi sahələrini uyğun olaraq S_1, S_2 və S_3 ilə işarə edək. S_1 sahəsini hesablayaq.Bunun üçün $y=-x^2+8x-7$ funksiyasının qrafiki və Ox oxunun $[1;7]$ aralığı ilə əhatə olunmuş əyrixətli trapesiyanın sahəsindən, $y=-x^2+4x-3$ funksiyasının qrafiki və Ox oxunun $[1;3]$ aralığı ilə əhatə olunmuş əyrixətli trapesiyanın sahəsini çıxmalıyıq.

$$S_1=\int_1^7(-x^2+8x-7)dx-\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+4x^2-7x\right)\Bigg|_1^7-$$

$$-\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_1^3=36+\frac{4}{3}=\frac{112}{3}.$$

S_2 və S_3 sahələrini hesablamaq üçün (3) düsturunu tətbiq edək.

$$S_2=\int_3^5(x^2-4s+3)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_3^5=\frac{10}{3},$$

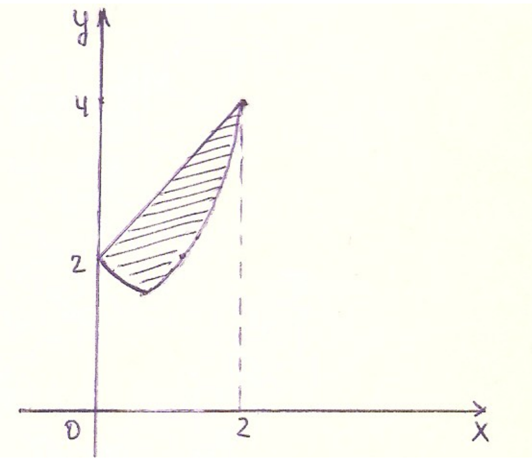
$$S_3=\int_5^7(-4x+28)dx=(-2x^2+28x)\Big|_5^7=8.$$

Beləliklə,

$$S=S_1+S_2+S_3=\frac{112}{3}+\frac{10}{3}+8=\frac{146}{3}.$$

Misal 9. $y=x^2-x+2$ parabolası və $y=\ln x+3$ əyrisinə absisi $x=1$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunan ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.

Həlli.Əvvəlcə $y=\ln x+3$ əyrisinə absisi $x=1$ olan nöqtədə toxunanın tənliyini yazaq.Bunun üçün $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$ düsturunda $x_0=1, y_0=3$ və $f'(x_0)=1$ olduğunu nəzərə alsaq, $y=x+2$ olar.Deməli, tələb olunan toxunanın tənliyi $y=x+2$ düz xəttidir.



şəkil 11

Beləliklə, $y=x^2-x+2$ parabolası və $y=x+2$ düz xətti ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapmalıyıq (şəkil 11).Bunun üçün (3) düsturundan istifadə etsək, alarıq:

$$S=\int_0^2\left(x+2-\left(x^2-x+2\right)\right)dx=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Aşağıdakı çalışmaları nümunə üçün veririk.

Xətlərlə əhatə olunmuş fiqurun shəsini hesablayın (1-10).

1. $y=3x+18-x^2, y=0.$
2. $y=\frac{1}{x}, x=1, x=2,, y=0.$
3. $y=\frac{5}{x}, y=6-x, x=6.$
4. $y=x^2-2x+3, y=4-2x.$
5. $y=2-|2-x|, y=\frac{3}{|x|}.$
6. $y=\frac{x^2}{2}-x+2, y=x, x=0.$
7. $y=-x^2+6x-5, y=-x^2+4x-3, y=3x-15.$
8. $y=x^2, y=2x-x^2.$
9. $y=e^x, y=0, x=2.$
10. $y=x^4-2x^2+5, y=1, x=0, x=1.$
11. $y=x^2+10$ parabolası və həmin parabolaya $A(0;1)$ nöqtəsində çəkilmiş toxunan ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini hesablayın.

23 yanvar 1986-cı il.