Çətinliyi artırılmış çalışmaların həlli təcrübəsindən

Rafiq Quliyev
Tovuz rayonu, Aşağı Mülkülü kənd orta məktəbin riyaziyyat müəllimi

Yeni məktəb islahatının ən vacib məsələlərindən biri də riyaziyyatın tədris vəziyyətini yaxşılaşdırmaq və bu elmə şagirdlərdə dərin maraq oyatmaqdır.Təcrübə göstərir ki, çətinliyi artırılmış çalışmalar şagirdlərin riyaziyyata marağını artırır və onların riyazi qabiliyyətlərinin inkişafında böyük rol oynayır.Biz şagirdlərin tədris prosesində öyrəndikləri bilikləri möhkəmləndirmək və daha da zənginləşdirmək üçün sinifdənxaric məşğələlərdə bu növ çalışmalara geniş yer veririk.Aydındır ki, çətinliyi artırılmış çalışmalar standart üsulla həll olunmur, bu isə şagirdləri daha dərindən düşünməyə və müxtəlif həll üsulları fikirləşməyə "məcbur" edir.Bu isə şagirdlərə riyaziyyat elminin zənginliyini bir daha xatırladır və onlarda bu elmə dərin maraq oyadır.

Biz bu məqaləmizdə bir neçə çətinliyi artırılmış çalışmaların həll nümunələrini veririk.

Misal 1. $log_3\left(3+\sqrt{3+x}\right)=\dfrac{2}{log_x 3}$ tənliyini həll edin.

Həlli.Tənliyin sağ tərəfini aşağıdakı kimi çevirək.

$$log_3\left(3+\sqrt{3+x}\right)=2\,log_3 x \Leftrightarrow log_3\left(3+\sqrt{3+x}\right)=log_3 x^2 \Leftrightarrow 3+\sqrt{3+x}=x^2 \Leftrightarrow \sqrt{3+x}=x^2-3.$$

$\sqrt{3+x}=t$ əvəzləməsi qəbul edək.Onda

$$\begin{cases}\sqrt{3+x}=t\\ t=x^2-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3+x=t^2\\ x^2-3=t\end{cases}$$

Sistemin hər iki tənliyini tərəf-tərəfə toplayaq və alınmış tənlikdə aşağıdakı çevirmələri aparaq:

$$t^2+t=x+x^2 \Leftrightarrow t-x=t^2-x^2 \Leftrightarrow t-x+(t-x)(t+x)=0 \Leftrightarrow (t-x)(1+t+x)=0$$

Sonra aşağıdakı iki sistemi həll edirik:

$$1)\ \begin{cases}t-x=0\\ x^2-3=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=x\\ x^2-3=x\end{cases} \Rightarrow x^2-x-3=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

$$2)\begin{cases}1+t+x=0\\ x^2-3=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=-x-1\\ x^2-3=-x-1\end{cases} \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\ x=1\end{cases}$$

Alınmış köklərin $x \succ 0$ və $x^2-3 \geq 0$ şərtlərini ödəməsini yoxlayıb yəqin edirik ki, $x=1, x=-2$ və $x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ kökləri kənar köklərdir.Deməli, $x \in \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Misal 2. $log_5 x\left(log_5 x-4\right)+x\left(log_5 x+2\right)=12$ tənliyini həll edin.

Həlli.Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək.

$$\log_5^2 x - 4\log_5 x + x\log_5 x + 2x = 12 \Rightarrow \log_5^2 x + (x-4)\log_5 x + 2x - 12 = 0.$$

Bu tənliyi isə $\log_5 x$-dən asılı kvadrat tənlik kimi həll edək.

$$\log_5 x = \frac{4 - x \pm \sqrt{(4-x)^2 - 4(2x-12)}}{2} = \frac{4 - x \pm \sqrt{(x-8)^2}}{2} = \frac{4 - x \pm |x-8|}{2} = \frac{4 - x \pm (x-8)}{2}.$$

1) $\log_5 x = -2 \Leftrightarrow x = 5^{-2}$.

2) $\log_5 x = 6 - x \Leftrightarrow x = 5^{6-x} \Leftrightarrow x5^x = 5^6$.

Aşkardır ki, bu tənliyin həlli x=5-dir.Doğrudan da, $x \prec 0$ olduqda tənliyin həlli yoxdur, $x \succ 0$ olduqda isə $y = x5^x$ funksiyası monoton artır və buradan çıxır ki, tapılmış x=5 qiyməti bu tənliyin yeganə həllidir.Beləliklə, $x \in \{5^{-2}; 5\}$.

Misal 3. $2\sin x = 5x^2 + 2x + 4$ tənliyini həll edin.

Həlli.Tənliyin hər iki tərəfini aşağıdakı kimi çevirək:

$$\sin x = \frac{5}{2}x^2 + x + 2 \Leftrightarrow \sin x = \left(\tfrac{\sqrt{10}}{2}x + \tfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + 1{,}9$$

Asanlıqla yəqin etmək olar ki,

$$\left(\tfrac{\sqrt{10}}{2}x + \tfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + 1{,}9 \geq 1{,}9.$$

Digər tərəfdən isə, $|\sin x| \leq 1$. Deməli, bu tənliyin həlli yoxdur. $x \in \{\emptyset\}$

Misal 4. $\arccos 3^{2x+1} + \arccos\sqrt{3^{4x+3}} = \dfrac{\pi}{2}$ tənliyini həll edin.

Həlli. $3^{2x+1} = t$ əvəzləməsi qəbul edək.Onda

$\sqrt{3^{4x+3}} = \sqrt{3.3^{2(2x+1)}} = \sqrt{3t^2} = t\sqrt{3}$ olar. Bu əvəzləmələri verilən tənlikdə nəzərə alsaq, alarıq.

$$\arccos t + \arccos\left(t\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos\left(t\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos t.$$

Aşağıdakı ardıcıl eynigüclü tənliklərə baxaq:

$$\cos\left(\arccos\left(t\sqrt{3}\right)\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \arccos t\right) \Leftrightarrow t\sqrt{3} = \sin(\arccos t) \Leftrightarrow t\sqrt{3} = \sqrt{1 - t^2} \Leftrightarrow 3t^2 = 1 - t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{2x+1} = -\tfrac{1}{2} \\ 3^{2x+1} = \tfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset \\ 2x + 1 = \log_3 \tfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow 2x = -1 - \log_3 2 \Rightarrow 2x = -\log_3 6 \Rightarrow x = -\log_3 \sqrt{6}.$$

$x \in \{-\log_3 \sqrt{6}\}$.

Misal 5. $\sqrt[3]{lg(arcsin\,2x)+1}-\sqrt[3]{lg(arcsin\,2x)-1}=2$ tənliyini həll edin.

Həlli. $lg(arcsin\,2x)=t$ işarə edək. Onda

$$\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t-1}=2\Rightarrow\sqrt[3]{t+1}=2+\sqrt[3]{t-1}\Rightarrow t+1=8+12\sqrt[3]{t-1}+6\left(\sqrt[3]{t-1}\right)^2+t-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt[3]{t-1}\right)^2+2\sqrt[3]{t-1}+1=0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{t-1}+1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt[3]{t-1}+1=0\Rightarrow\sqrt[3]{t-1}=-1\Rightarrow t-1=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=0\Rightarrow lg(arcsin2x)=0\Rightarrow arcsin\,2x=1\Rightarrow 2x=sin\,1\Rightarrow x=\tfrac{1}{2}sin\,1.$$

$x\in\left\{\tfrac{1}{2}sin\,1\right\}.$

Misal 6. $log_2(2^x-1).log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)\prec -2$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli. Təyin oblastını tapaq.

$2^x-1\succ 0\Rightarrow 2^x\succ 1\Rightarrow x\succ 0, x\in\,]0;+\infty[.$

Verilən bərabərsizliyi aşağıdakı şəkildə çevirək.

$$log_2(2^x-1)(-log_2 2(2^x-1))\prec -2\Rightarrow log_2(2^x-1)(-1-log_2(2^x-1))\prec -2\Rightarrow$$

$$\begin{cases} log_2(2^x-1)=t \\ t(-1-t)\prec -2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} log_2(2^x-1)=t \\ t^2+t-2\succ 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} log_2(2^x-1)=t \\ \left[\begin{array}{l} t\prec -2 \\ t\succ 1 \end{array}\right. \end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} log_2(2^x-1)\prec -2 \\ log_2(2^x-1)\succ 1 \end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} 2^x-1\prec\frac{1}{4} \\ 2^x-1\succ 2 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} 2^x\prec\frac{5}{4} \\ 2^x\succ 3 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x\prec log_2\frac{5}{4} \\ x\succ log_2 3 \end{array}\right..$$

$x\succ 0$ olduğunu nəzərə alsaq, verilən bərabərsizliyin həlli

$x\in\,\left]0:log_2\tfrac{5}{4}\right[\cup\left]log_2 3:+\infty\right[$ olar.

Misal 7. $log_3(ctg(2\pi tgx))\prec 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.Verilən bərabərsizliyi onunla eynigüclü bərabərsizlik şəklində yazaq:

$log_3(ctg(2\pi tgx))\prec 0\Leftrightarrow ctg(2\pi tgx)\prec 1.$

$ctgx\prec a$ şəklində bərabərsizliyin həllindən istifadə etsək, alarıq.

$$\frac{\pi}{4}+k\pi\prec 2\pi tgx\prec\pi+k\pi\Rightarrow\frac{1}{8}+\frac{k}{2}\prec tgx\prec\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\Rightarrow arctg\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{k}{2}\right)+n\pi\prec x\prec arctg\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{k}{2}\right)+n\pi$$

$$x\in\left]arctg\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{k}{2}\right)+n\pi;arctg\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{k}{2}\right)+n\pi\right[,k,n\in Z.$$

Misal 8. $cos\sqrt{1-x}\prec\frac{1}{\sqrt{2}}$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.Təyin oblastını tapaq.

$1-x\geq 0\Rightarrow x\leq 1, x\in\,]-\infty;1].$

$\cos x \prec a$ şəklində bərabərsizliyin həllindən istifadə etsək, alarıq.

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \prec \sqrt{1 - x} \prec 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi n \prec \sqrt{1 - x} \prec \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right)^2 \prec 1 - x \prec \left(\tfrac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)^2 \Rightarrow -1 + \left(\tfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right)^2 \prec -x \prec -1 + \left(\tfrac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\tfrac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)^2 \prec x \prec 1 - \left(\tfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right)^2.$$

$$x \in \left]1 - \left(\tfrac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)^2 ; 1 - \left(\tfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right)^2\right[, n \in Z.$$

Aşağıdakı çalışmaları müstəqil həll etmək üçün təklif edirik.

1. $\log_5\left(\sqrt{x+7} + 7\right) = \log_{\sqrt{5}} x$ tənliyini həll edin. Cavab: $x = \dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$.

2. $2^{\log_3^2 x - \log_3 x} \cdot \left(4^{\log_3 x + 1} - 1\right) = 252$ tənliyini həll edin. Cavab: x=9.

3. $4^x + (x - 1)2^x = 6 - 2x$ tənliyini həll edin. Cavab: x=1.

4. $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$ tənliyini həll edin. Cavab: $x_1 = 10^{2k + \frac{1}{2}}, x_2 = 10^{2k}, k \in Z$

5. $2\cos x = 3^x + 3^{-x}$ tənliyini həll edin. Cavab:x=0.

6. $\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$ tənliyini həll edin. Cavab: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, y = 2.$

7. $3^{k.arcctgx} + 4^{k.arsctgx} = 5^{k.arsctgx}$ tənliyini həll edin. Cavab: $x = ctg\dfrac{2}{k}\ \left(k \succ \tfrac{2}{\pi}\right).$

8. $\log_3(3^x - 1).\log_3(3^{x+1} - 3) \succ 6$ bərabərsizliyini həll edin.

Cavab: $x \in \left]0; \log_3 28 - 3;\right[\cup \left]\log_3 10; +\infty\right[.$

9. $\sin\dfrac{2 - x}{3} \succ \dfrac{1}{2}$ bərabərsizliyini həll edin. Cavab: $x \in \left]\tfrac{7\pi}{2} + 2 + 6\pi n; \tfrac{11\pi}{2} + 2 + 6\pi n\right[, n \in Z.$

10. $tg\left(2 \arcsin\sqrt{x}\right) \prec \sqrt{3}$ bərabərsizliyini həll edin. Cavab: $x \in \left]0; \tfrac{1}{4}\right[\cup \left]\tfrac{1}{2}; 1\right[.$

24 sentyabr 1986-cı il.