Üstlü və loqarifmik tənliklərin həlli

Rafiq Quliyev
Tovuz rayonu, Aşağı Mülkülü kənd orta məktəbin müəllimi

Müasir dövrdə orta məktəbdə riyaziyyat fənnini tədris edən müəllimlər qarşısında böyük tələblər qoyulur.Bu tələblərdən başlıcası öyrənilən bilik və bacarıqları şagirdlərin şüurlu surətdə mənimsəmələrinə nail olmaqdır.Orta məktəb riyaziyyat kursunda öyrənilən və ali məktəblərə qəbul imtahanları zamanı geniş yer verilən bölmələrdən biri də Üstlü və loqarifmiktənliklərdir.Bu bölməni daha yaxşı mənimsətmək üçün orta məktəb kursunda verilən materialla kifayətlənmək olmaz.Təcrübə göstərir ki, şagirdlər Üstlü və loqarifmik tənliklərin bəzi növlərini həll etməkdə və yaxud alınmış kökləri araşdırmaqda çətinlik çəkirlər.Bu isə şagirdlərin lazımi nəzəri materialı yaxşı bilməmələrindən və tənliklərə tətbiq edərkən səhvə yol vermələrindən irəli gəlir.Bunları nəzərə alaraq, bu məqaləmizdə müxtəlif növ üstlü və loqarifmik tənliklərin həll üsullarını və onlara aid nümunələri verəcəyik.

I.Müxtəlif növ üstlü tənliklərin həlli.

Məlumdur ki,

$$a^x = b, a \succ 0, b \succ 0, a \neq 1 \qquad (1)$$

şəklində sadə üstlü tənliyin kökü $x = \log_a b$ düsturundan tapılır.

Əgər (1) tənliyində x dəyişəninin yerinə hər hansı $\varphi(x)$ funksiyası durarsa, başqa sözlə

$$a^{\varphi(x)} = b, a \succ 0, b \succ 0, a \neq 1 \qquad (2)$$

şəklində tənliyi həll etmək üçün, bu tənliyin hər tərəfini a əsasına loqarifmləyib, (2) tənliyini onunla eynigüclü olan $\varphi(x) = \log_a b$ tənliyinə gətirmək lazımdır.Bu tənlikdən isə x dəyişəninin (2) tənliyini ödəyən qiymətləri tapılır.

Ümumiyyətlə, üstlü tənlikləri həll edərkən ən çox ənənəvi üsuldan, yəni eyni əsasa gətirmə üsulundan istifadə olunur.Belə ki, verilən tənlik müxtəlif çevirmələr yolu ilə

$$a^{\varphi_1(x)} = a^{\varphi_2(x)}, a \succ 0, a \neq 1 \qquad (3)$$

şəklində tənliyə gətirilir. x dəyişəninin (3) tənliyini ödəyən qiymətləri isə $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ tənliyindən tapılır.

Misal 1. $\sqrt{8^x \sqrt[3]{64^x \sqrt[x]{0,5}}} = 2\sqrt[3]{16}$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyin hər tərəfini aşağıdakı şəkildə çevirib, eyni əsasa gətirək:

$$\sqrt{2^{3x} \sqrt[3]{2^{6x} . 2^{-\frac{1}{x}}}} = 2.2^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \sqrt{2^{3x} . 2^{\frac{6x^2-1}{3x}}} = 2^{\frac{7}{3}} \Rightarrow 2^{\frac{15x^2-1}{6x}} = 2^{\frac{7}{3}} \Rightarrow \frac{15x^2-1}{6x} = \frac{7}{3} \Rightarrow 15x^2 - 14x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x = 1, x = -\tfrac{1}{15} \right. . \qquad x \in \left\{ -\tfrac{1}{15}; 1 \right\}.$$

Misal 2. $8^{\frac{x-3}{3x-7}} \sqrt[3]{\sqrt{0,25^{\frac{3x-1}{x-1}}}} = 1$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyin sol tərəfini aşağıdakı şəkildə çevirib, eyni əsasa gətirək.

$$2^{\frac{3x-9}{3x-7}} \sqrt[3]{\sqrt{2^{-2.\frac{3x-1}{x-1}}}} = 1 \Rightarrow 2^{\frac{3x-9}{3x-7}} . 2^{\frac{1-3x}{3x-3}} = 2^0 \Rightarrow 2^{\frac{3x-9}{3x-7} + \frac{1-3x}{3x-3}} = 2^0 \Rightarrow \frac{3x-9}{3x-7} + \frac{1-3x}{3x-3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}. \qquad x \in \left\{ \tfrac{5}{3} \right\}.$$

Əgər,

$$a^{\varphi_1(x)} = b^{\varphi_2(x)}, a \succ 0, b \succ 0, a \neq 1, b \neq 1 \qquad (4)$$

şəklində tənlik verilmişsə, onda (4) tənliyinin hər tərəfini hər hansı c $(c \succ 0, c \neq 1)$ əsasdan loqarifmləyib, onunla eynigüclü olan

$$\varphi_1(x) \log_c a = \varphi_2(x) \log_c b \qquad (5)$$

tənliyinə gətiririk. (5) tənliyindən isə x dəyişəninin (4) tənliyini ödəyən qiymətləri tapılır.

Misal 3. $3^{x-2} = 5^{2x+1}$ tənliyini həll edin.

Bu tənliyin hər tərəfini 10 əsasına görə loqarifmləsək, alarıq:

$$(x-2)\lg 3=(2x+1)\lg 5 \Rightarrow (\lg 3-2\lg 5)x=\lg 5+2\lg 3 \Rightarrow x=\frac{\lg 5+2\lg 3}{\lg 3-2\lg 5}$$ və yaxud

$x=\log_{\frac{3}{25}} 45.$

$$x\in\left\{\log_{\frac{3}{25}} 45\right\}$$

Misal 4. $7^{x^2-1}=4^{x+1}$ tənliyini həll edin.

Həlli.Tənliyin hər tərəfini 2 əsasına görə loqarifmləsək, alarıq:

$$(x^2-1)\log_2 7=(x+1)\log_2 4 \Rightarrow (x^2-1)\log_2 7=2(x+1) \Rightarrow x^2\log_2 7-2x-(2+\log_2 7)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm(1+\log_2 7)}{\log_2 7} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{2+\log_2 7}{\log_2 7} \end{array} \text{ v yaxud } \begin{array}{l} x=-1 \\ x=1+\log_7 4 \end{array}.$$

$$x\in\{-1;1+\log_7 4\}.$$

Əgər (3) tənliyində a əsasının yerinə hər hansı f(x) funksiyası durarsa, başqa sözlə

$$f(x)^{\varphi_1(x)}=f(x)^{\varphi_2(x)}$$

(6)

şəklində tənliyi həll etmək üçün aşağıdakı üç hala baxılır:

1) əgər f(x)=1 olarsa, onda (6) tənliyinin hər tərəfi istənilən $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$-lər üçün bərabərdir;
2) əgər $f(x)\neq 1, f(x)\succ 0$ olarsa, onda (6) tənliyini onunla eynigüclü olan $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ tənliyi şəklində göstərmək olar;
3) əgər $f(x)=0$ olarsa, onda (6) tənliyi $\varphi_1(x)\succ 0$ və $\varphi_2(x)\succ 0$ şərtlərində doğru bərabərliyə çevrilər.

Ümumiyyətlə, (6) şəklində tənliyin hər tərəfini $f(x)\succ 0$ şərti daxilində istənilən $c(c\succ 0, c\neq 1)$ əsasına görə loqarifmləyib, onunla eynigüclü olan

$$\varphi_1(x)\log_c f(x)=\varphi_2(x)\log_c f(x) \qquad (7)$$

şəklində tənliyə gətirmək olar. (7) tənliyi isə $\log_c f(x)=0$ və $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ birgə tənlikləri ilə eynigüclüdür.Başqa sözlə,

$$f(x)^{\varphi_1(x)}=f(x)^{\varphi_2(x)} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x)\succ 0 \\ \varphi_1(x)\log_c f(x)=\varphi_2(x)\log_c f(x) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x)\succ 0 \\ (\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\log_c f(x) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x)\succ 0 \\ \log_c f(x)=0\ . \\ \varphi_1(x)=\varphi_2(x) \end{array}$$

Misal 5. $(x+2)^{x^2}=(x+2)^{x+1}$ tənliyini həll edin.

Həlli. $x+2\succ 0$ şərti daxilində verilən tənliyin hər tərəfini 10 əsasına görə loqarifmləyib, (7) tənliyinə analoji tənlik alarıq:

$$x^2\lg(x+2)=(x+1)\lg(x+2) \Rightarrow \begin{array}{l} \lg(x+2)=0 \\ x^2=x+1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x+2=1 \\ x^2-x-1=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}.$$

Alınmış köklərin hər biri $x+2\succ 0$ şərtini ödədiyindən verilən tənliyin kökləri aşağıdakı kimi olar.

$$x\in\left\{-1;\tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Misal 6. $\sqrt[3]{(x-2)^{2x+1}}=\sqrt{(x-2)^{x+3}}$ tənliyini həll edin.

Həlli. Verilən tənliyi aşağıdakı kimi çevirək.

$$(x-2)^{\frac{2x+1}{3}} = (x-2)^{\frac{x+3}{2}}$$

$x-2 \succ 0$ şərti daxilində bu tənliyin hər tərəfini 10 əsasına görə loqarifmləsək, alarıq:

$$\frac{2x+1}{3} lg(x-2) = \frac{x+3}{2} lg(x-2) \Rightarrow \begin{array}{l} lg(x-2)=0 \\ \frac{2x+1}{3} = \frac{x+3}{2} \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} x-2=1 \\ 4x+2=3x+9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \end{array}.$$

x=3 və x=7 kökləri $x-2 \succ 0$ şərtini ödədiyindən , hər ikisi verilmiş tənliyin kökü olar.Digər tərəfdən, x-2=0 və yaxud x=2 olduqda, $\frac{2x+1}{3} \succ 0$ və $\frac{x+3}{2} \succ 0$ olduğundan, x=2 qiyməti də verilən tənliyin kökü olar.Beləliklə, $x \in \{2;3;7\}$.

$$f\left(a^{\varphi(x)}\right) = 0 \qquad (8)$$

şəklində (burada f və φ verilmiş hər hansı funksiyalardır) tənliyi həll etmək üçün $a^{\varphi(x)} = t$ əvəzləməsi qəbul etsək, (8) tənliyi f(t)=0 şəklində tənliyə çevrilər.Bu tənlikdən t-nin qiymətlərini tapıb, $a^{\varphi(x)} = t$ əvəzləməsində yerinə yazıb, x dəyişəninin (8) tənliyini ödəyən qiymətlərini tapırıq.Başqa sözlə,

$$f\left(a^{\varphi(x)}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} a^{\varphi(x)} = t \\ f(t) = 0 \end{array} \qquad (9)$$

sistemini birgə həll etmək lazımdır.

Misal 7. $4^x - 10.2^{x-1} - 24 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli.Tənliyin sol tərəfini aşağıdakı kimi çevirək və (9) sistemindən istifadə edək.

$$2^{2x} - 5.2^x - 24 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 2^x = t \\ t^2 - 5t - 24 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^x = t \\ t = -3 \Rightarrow \\ t = 8 \end{array} \begin{array}{l} 2^x = -3 \\ 2^x = 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in \emptyset \\ x = 3 \end{array}. \qquad x \in \{3\}.$$

Misal 8. $4^{2-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} - 5.2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} = 6$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyi aşağıdakı şəkildə çevirək.

$$4 \times 4^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} - 5 \times 2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} = 6 \longrightarrow\Rightarrow 4 \times 2^{2\left(1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}\right)} - 5 \times 2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} = t \\ 4t^2 - 5t - 6 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} = t \\ t = -\frac{3}{4} \\ t = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} = -\frac{3}{4} \\ 2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in \emptyset \\ 1 - x + \sqrt{4-5x+2x^2} = 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-5x+2x^2} = x \Rightarrow \begin{array}{l} x \succ 0 \\ 4-5x+2x^2 = x^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x \succ 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x \succ 0 \\ x = 1 \Rightarrow \\ x = 4 \end{array} \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}. \quad x \in \{1;4\}.$$

Əgər üstlü tənliyə daxil olan ifadələrin əsasları ardıcıllığı hər hansı həndəsi silsilənin hədləri, üstləri isə eyni olarsa, belə üstlü tənliklər bircins üstlü tənliklər adlanır.Bircins üstlü tənlikləri həll etmək üçün tənliyin hər tərəfini kənar hədlərdən birinə bölüb, (8) şəklində tənliyə gətirmək lazımdır.

Misal 9. $3 \times 4^x + 2 \times 9^x = 5 \times 6^x$ tənliyini həll edin.

Həlli.Bu tənliyin hədləri (4,6,9) həndəsi silsilə əmələ gətirdiyindən və üstləri eyni olduğundan, bircins tənlikdir.Ona görə, tənliyin hər tərəfini 9^x -a böısək, alarıq:

$$3\times\frac{4^x}{9^x}+2=5\times\frac{6^x}{9^x}\Rightarrow 3\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2x}-5\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^{x}+2=0\Rightarrow\begin{matrix}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{x}=t\\ 3t^2-5t+2=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{x}=t\\ t=1\\ t=\tfrac{2}{3}\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{x}=1\\ \left(\tfrac{2}{3}\right)^{x}=\tfrac{2}{3}\end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}x=0\\ x=1\end{matrix}. \qquad x\in\{0;1\}.$$

Misal 10. $4\sqrt[x]{81}-12\sqrt[x]{36}+9\sqrt[x]{16}=0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Bu tənliyi aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$4\times 81^{\frac{1}{x}}-12\times 36^{\frac{1}{x}}+9\times 16^{\frac{1}{x}}=0$$

Alınmış tənliyin bircins olduğunu asanlıqla müəyyən etmək olar.Ona görə də bu tənliyin hər tərəfini $81^{\frac{1}{x}}$ -a bölək:

$$4-12\times\frac{36^{\frac{1}{x}}}{81^{\frac{1}{x}}}+9\times\frac{16^{\frac{1}{x}}}{81^{\frac{1}{x}}}=0\Rightarrow 9\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}}-12\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+4=0\Rightarrow\begin{matrix}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}=t\\ 9t^2-12t+4=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}=t\\ (3t-2)^2=0\end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}=t\\ 3t-2=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}=t\\ t=\tfrac{2}{3}\end{matrix}\Rightarrow\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}=\tfrac{2}{3}\Rightarrow\tfrac{2}{x}=1\Rightarrow x=2. \qquad x\in\{2\}.$$

Müstəqil həll etmək üçün çalışmalar.

Tənlikləri həll edin.

1. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x.0{,}125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$ Cavab: $x\in\left\{-\frac{1}{5};3\right\}$.
2. $\sqrt{3}\times 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\times\left(\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=81$ Cavab: $x\in\{81\}$.
3. $2^{x-5}=3^{x+1}$ Cavab: $x\in\left\{\log_{\frac{2}{3}}96\right\}$.
4. $5^{7^x}=7^{5^x}$ Cavab: $x\in\left\{\log_{\frac{7}{5}}(\log_5 7)\right\}$
5. $\sqrt[4]{(x-3)^{x+1}}=\sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$ Cavab: $x\in\{3;4;11\}$.
6. $(2x-5)^{2x^2-x}=(2x-5)^{14x-28}$ Cavab: $x\in\{2{,}5;3;3{,}5;4\}$.
7. $3\times 5^{2x-1}-2\times 5^{x-1}=0{,}2$ Cavab: $x\in\{0\}$.
8. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\times 2^{x+\sqrt{x^2-2}}=6$ Cavab: $x\in\left\{\frac{3}{2}\right\}$.
9. $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\times 50^{\frac{1}{x}}$ Cavab: $x\in\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.
10. $5^{1+2x}-7\times 10^x+2\times 4^x=0$ Cavab: $x\in\{-1\}$.

II.Müxtəlif növ loqarifmik tənliklərin həlli.

Məlumdur ki,

$$\log_a x=b,a\succ 0,a\neq 1 \qquad (1)$$

şəklində sadə loqarifmik tənliyin kökü $x\succ 0$ şərti daxilində $x=\ a^b$ düsturundan tapılır. Əgər (1) tənliyində x dəyişəninin əvəzinə hər hansı $\varphi(x)$ funksiyası durarsa, başqa sözlə

$$\log_a\varphi(x)=b,a\succ 0,a\neq 1 \qquad (2)$$

şəklində tənliyi həll etmək üçün, (2) tənliyini $\varphi(x)\succ 0$ şərti daxilində onunla eynigüclü olan $\varphi(x)=a^b$ tənliyi şəklində yazmaq lazımdır.Bu tənlikdən isə x dəyişəninin (2) tənliyini ödəyən qiymətləri tapılır.

Ümumiyyətlə, loqarifmik tənlikləri mümkün olan halda müxtəlif çevirmələr vasitəsilə (1), (2) tənliklərinə və yaxud

$$\log_a\varphi_1(x)=\log_a\varphi_2(x),a\succ 0,a\neq 1 \qquad (3)$$

şəklində tənliyə gətirmək əlverişlidir. (3) tənliyinin kökləri isə $\varphi_1(x) \succ 0$ və $\varphi_2(x) \succ 0$ şərtləri daxilində $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ tənliyindən tapılır.

Misal 1. $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyin hər tərəfini aşağıdakı kimi çevirək.

Misal 2. $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək.

$$\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = \log_4 16 - \log_4 8 \Rightarrow \log_4(x+3) = \log_4(x-1) + \log_4 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_4(x+3) = \log_4(2x-2) \Rightarrow x+3 = 2x-2 \Rightarrow x = 5.$$

x=5 qiyməti tənliyin təyin oblastına daxil olduğundan və tənliyi doğru bərabərliyə çevirdiyindən verilmiş tənliyin yeganə kökü olar. $x \in \{5\}$.

Əgər (3) tənliyində a əsasının yerinə hər hansı $f(x)$ funksiyası durarsa , başqa sözlə

$$\log_{f(x)} \varphi_1(x) = \log_{f(x)} \varphi_2(x) \qquad (4)$$

şəklində tənlik verilmişsə , onda bu tənliyi $\varphi_1(x) \succ 0, \varphi_2(x) \succ 0, f(x) \succ 0$ və $f(x) \neq 1$ şərtləri daxilində onunla eynigüclü olan $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ tənliyinə gətirmək lazımdır.

Misal 3. $\log_{2x-7}(x^2 - 4x + 20)\log_x(2x-7) = 2$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək.

$$\log_{2x-7}(x^2 - 4x + 20) = \frac{2}{\log_x(2x-7)} \Rightarrow \log_{2x-7}(x^2 - 4x + 20) = \log_{2x-7} x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 20 = x^2 \Rightarrow x = 5.$$

x=5 kökünün (4) tənliyində verilmiş şərtləri ödədiyini asanlıqla müəyyən etmək olar.Ona görə də x=5 qiyməti verilən tənliyin yeganə kökü olar. $x \in \{5\}$.

Misal 4. $\log_x 2.\log_{2x} 2 = \log_{8x} 2$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək.

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2(2x)} = \frac{1}{\log_2(8x)} \Rightarrow \log_2 x.\log_2(2x) = \log_2(8x) \Rightarrow \log_2 x(1 + \log_2 x) = 3 + \log_2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2^2 x = 3 \Rightarrow \log_2 x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 2^{\pm\sqrt{3}}. \qquad x \in \{2^{\pm\sqrt{3}}\}.$$

Bəzi loqarifmik tənlikləri həll edərkən , hasilin , nisbətin və qüvvətin loqarifmləri düsturlarından istifadə etmək lazım gəlir.Bu zaman kənar köklərin alınmasına və yaxud köklərin itirilməsi hallarına rast gəlinir.Şagirdlər belə hallarda bunu izah etməkdə çətinlik çəkirlər.Ona görə də loqarifmik tənlikləri həll edərkən , alınmış köklərin tənliyin təyin oblastına daxil olmasına və tənliyi doğru bərabərliyə çevirməsinə dəqiq fikir vermək lazımdır.Ümumiyyətlə , qüvvətin loqarifmi düsturundan istifadə edərkən , qüvvət üstü cüt ədəd $(2k, k \in R, k \neq 0)$ olarsa , başqa sözlə , $\log_a(\varphi(x))^{2k} (k \in R, k \neq 0)$ şəklində ifadəni çevirərkən , aşağıdakı iki hala baxılır:

$$\log_a(\varphi(x))^{2k} = 2k\log_a|\varphi(x)| = \begin{matrix} 2k\log_a \varphi(x), \varphi(x) \succ 0 \text{ olarsa ,} \\ 2k\log_a(-\varphi(x)), \varphi(x) \prec 0 \text{ olarsa.} \end{matrix} \qquad (5)$$

Misal 5. $\log_{49} x^2 + \log_7(x-1) = \log_7(\log_{\sqrt{3}} 3)$ tənliyini həll edin.

Həlli. Təyin oblastını tapaq:

$x - 1 \succ 0 \Rightarrow x \succ 1, x \in]1; +\infty[.$

Verilən tənliyi aşağıdakı kimi çevirək:

$$\log_{7^2} x^2 + \log_7(x-1) = \log_7 2 \Rightarrow \log_7|x| + \log_7(x-1) = \log_7 2 \Rightarrow \log_7(|x|(x-1)) = \log_7 2 \Rightarrow |x|(x-1) = 2.$$

Tənliyin təyin oblastı $x \succ 1$ olduğundan $|x| = x$ olar və sonuncu tənliyimiz aşağıdakı şəklə düşər.

$$x(x+1) = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ x = 2 \end{matrix}.$$

$x = -1$ qiyməti tənliyin təyin oblastına daxil olmadığından kənar kökdür.

$$x \in \{2\}.$$

Misal 6. $log_5(3x) = 0{,}5\,log_5(x-2)^2$ tənliyini həll edin.

Həlli. (5) bərabərliklərindən istifadə edək.

1) Tutaq ki , $x - 2 \succ 0$ -dır.Onda $log_5(x-2)^2 = 2\,log_5(x-2)$ olar və tənliyimiz aşağıdakı şəklə düşər.

$$log_5(3x) = log_5(x-2) \Rightarrow 3x = x - 2 \Rightarrow x = -1.$$

x=-1 qiymətini verilən tənlikdə yerinə yazsaq , loqarifm işarəsi daxilində mənfi ədəd alınar , başqa sözlə , x=-1 kökü tənliyin təyin oblastına daxil olmadığından kənar kökdür.

2) Tutaq ki , $x - 2 \prec 0$ -dır.Onda $log_5(x-2)^2 = 2\,log_5(2-x)$ olar və tənliyimiz aşağıdakı şəklə düşər.

$$log_5(3x) = log_5(2-x) \Rightarrow 3x = 2 - x \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Beləliklə , $x = \dfrac{1}{2}$ qiyməti verilən tənliyin kökü olar. $x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$f\left(log_a \varphi(x)\right) = 0 \qquad (6)$$

şəklində (burada f və φ verilmiş hər hansı funksiyalardır) tənliyi həll etmək üçün $log_a \varphi(x) = t$ əvəzləməsi qəbul edib , (6) tənliyini $f(t) = 0$ şəklində tənliyə çeviririk.Bu tənlikdən t-nin qiymətlərini tapıb , $log_a \varphi(x) = t$ əvəzləməsində yerinə yazıb , x dəyişəninin (6) tənliyini ödəyən qiymətlərini tapırıq:Başqa sözlə ,

$$f\left(log_a \varphi(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} log_a \varphi(x) = t \\ f(t) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

sistemini birgə həll etmək lazımdır.

Misal 7. $4 - log_2 x = 3\sqrt{log_2 x}$ tənliyini həll edin.

Həlli.Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək və (7) sistemindən istifadə edək.

$$log_2 x + 3\sqrt{log_2 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{log_2 x} = t \\ t^2 + 3t - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_2 x} = t \\ \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{log_2 x} = -4 \\ \sqrt{log_2 x} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset \\ log_2 x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow x = 2.\ x \in \{2\}.$$

Misal 8. $log_3(3^x - 1)\,log_3(3^{x+1} - 3) = 6$ tənliyini həll edin.

Həlli.Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək və (7) sistemindən istifadə edək.

$$log_3(3^x - 1)(1 + log_3(3^x - 1)) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} log_3(3^x - 1) = t \\ t(1+t) - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_3(3^x - 1) = t \\ t^2 + t - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_3(3^x - 1) = t \\ \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} log_3(3^x - 1) = -3 \\ log_3(3^x - 1) = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 1 = \frac{1}{27} \\ 3^x - 1 = 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = \frac{28}{27} \\ 3^x = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = log_3 28 - 3 \\ x = log_3 10 \end{array}\right. .$$

$$x \in \{log_3 10; log_3 28 - 3\}.$$

Müstəqil həll etmək üçün çalışmalar:

Tənlikləri həll edin.

1. $log_2 x + log_4 x + log_8 x = 11$ Cavab: $x \in \{64\}$.

2. $log_5(3x) = log_5(9x)\,log_3 \dfrac{1}{3}$ Cavab: $x \in \{3^{-1,5}\}$.

3. $log_{x+4}(x^4 + x^2 + 2x)\,log_{x+1}(x+4) = 2$ Cavab: $x \in \{1\}$.

4. $\log_x 3.\log_{3x} 3 = \frac{1}{6}$ Cavab: $x \in \left\{\frac{1}{27};9\right\}$.

5. $\log_8(x-5) = \log_8(\log_2 64) - \log_{64} x^2$ Cavab: $x \in \{6\}$.

6. $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ Cavab: $x \in \left\{3;3+\sqrt{2}\right\}$.

7. $2\log_4 x + 3\log_x 4 = 5$ Cavab: $x \in \{4;8\}$.

8. $\log_2(16x).\log_{\frac{x}{\sqrt{2}}} x = 2\log_x\left(4x^3\right)$ Cavab: $x \in \left\{\frac{1}{2};2;4\right\}$.

III.Müxtəlif üsullardan istifadə etməklə üstlü və loqarifmik tənliklərin həlli.

Bəzi üstlü və loqarifmik tənlikləri standart üsulla həll etmək olmur.Ona görə də belə tənlikləri müxtəlif üsullardan istifadə etməklə həll etmək lazım gəlir.Bu üsullara bəzi düsturlardan istifadə , tənliyə daxil olan funksiyaları araşdırmaq və s. daxilidir.Məsələn , bəzi tənliklərin həlli zamanı

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, a \succ 0, b \succ 0, c \succ 0, c \neq 1 \quad (1)$$

düsturundan istifadə edilir.

Misal 1. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$ tənliyini həll edin.

Həlli. (1) bərabərliyinə əsasən , $x^{\lg 5} = 5^{\lg x}$. Bunu verilən tənlikdə nəzərə alsaq , alarıq:

$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5} \Rightarrow 2 \times 5^{\lg x} = 50 \Rightarrow 5^{\lg x} = 5^2 \Rightarrow \lg x = 2 \Rightarrow \lg x = 2 \Rightarrow x = 100. \qquad x \in \{100\}.$$

Misal 2. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$ tənliyini həll edin.

Həlli. $6^{\log_6^2 x} = \left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x} = x^{\log_6 x}$ olduğunu verilən tənlikdə nəzərə alsaq , alarıq:

$$6^{\log_6^2 x} + 6^{\log_6^2 x} = 12 \Rightarrow 2 \times 6^{\log_6^2 x} = 12 \Rightarrow 6^{\log_6^2 x} = 6 \Rightarrow \log_6^2 x = 1 \Rightarrow \log_6 x = \pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{6} \\ x = 6 \end{matrix}.$$

$$x \in \left\{\frac{1}{6};6\right\}.$$

Misal 3. $3^{x^2}\left(3^{2x+2} - 1\right) = 3^x \times 6552$ tənliyini həll edin.

Həlli. $6552 = 3^2\left(3^6 - 1\right)$ olduğunu verilən tənlikdə nəzərə alsaq , alarıq:

$$3^{x^2}\left(3^{2x+2} - 1\right) = 3^x.3^2\left(3^6 - 1\right) \Rightarrow 3^{x^2}\left(3^{2x+2} - 1\right) = 3^x.3^2\left(3^{2\times 2+2} - 1\right)$$

Buradan x=2 olduğunu asanlıqla müəyyən etmək olar.x=2 qiyməti tənliyi doğru bərabərliyə çevirdiyindən , verilən tənliyin yeganə kökü olar. $x \in \{2\}$.

Bəzən elə tənliklərə rast gəlinir ki , bu tənlikləri həll etmək üçün bəzi ifadələri bütünlüklə yeni dəyişənlə əvəz etmək lazım gəlir.

Misal 4. $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək:

$$3\left(3^{-x} + 3^x\right) + 9^x + 9^{-x} = 6$$

$3^{-x} - 3^x = t$ işarə edək.Onda $9^x + 9^{-x} = t^2 + 2$ olar və tənliyimiz aşağıdakı şəklə düşər.

$$3t + t^2 + 2 = 6 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} t = -4 \\ t = 1 \end{matrix}.$$

t-nin bu qiymətlərini əvəzləmədə yerinə yazsaq , alarıq:

$$\begin{cases} 3^{-x} + 3^{x} = -4 \\ 3^{-x} + 3^{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x} = y \\ \frac{1}{y} - y = -4 \\ \frac{1}{y} + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x} = y \\ y^{2} - 4y - 1 = 0 \\ y^{2} + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x} = y \\ y = 2 - \sqrt{5} \\ y = 2 + \sqrt{5} \\ y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^{x} = 2 - \sqrt{5} \\ 3^{x} = 2 + \sqrt{5} \\ 3^{x} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 3^{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x = \log_{3}\left(2+\sqrt{5}\right) \\ x \in \emptyset \\ x = \log_{3}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_{3}\left(2+\sqrt{5}\right) \\ x = \log_{3}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

$$x \in \left\{\log_{3}\left(2+\sqrt{5}\right); \log_{3}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}.$$

Misal 5. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x+1} = \frac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyi aşağıdakı şəkildə çevirək:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x}\left(2+\sqrt{3}\right) + \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x}}{2-\sqrt{3}} = \frac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

Aydındır ki, $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 1.$ Onda $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ olar və tənliyimiz aşağıdakı şəklə düşər.

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x} + \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x}} = \frac{101}{100} \Rightarrow \begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x} = t \\ t + \frac{1}{t} = \frac{101}{100} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x} = t \\ 10t^{2} - 101t + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x} = t \\ t = \frac{1}{10} \\ t = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x} = \frac{1}{10} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^{2}-2x} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{2} - 2x = -\log_{2+\sqrt{3}}10 \\ x^{2} - 2x = \log_{2+\sqrt{3}}10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{2} - 2x + \log_{2+\sqrt{3}}10 = 0 \\ x^{2} - 2x - \log_{2+\sqrt{3}}10 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, \text{çünki } \frac{D}{4} = 1 - \log_{2+\sqrt{3}}10 \prec 0 \\ x = 1 \pm \sqrt{1 + \log_{2+\sqrt{3}}10} \end{cases}$$

$$x \in \left\{1 \pm \sqrt{1 + \log_{2+\sqrt{3}}10}\right\}.$$

Misal 6. $2^{x+3} - 3^{x^{2}+2x-6} = 3^{x^{2}+2x-5} - 2^{x}$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək:

$$2^{x+3} + 2^{x} = 3^{x^{2}+2x-5} + 3^{x^{2}+2x-6} \Rightarrow 9 \times 2^{x} = 3^{x^{2}+2x} \times \frac{4}{3^{6}} \Rightarrow 2^{x-2} = 3^{x^{2}+2x-8} \Rightarrow 2^{x-2} = \left(3^{x+4}\right)^{x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x + 4 = \log_{3}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_{3}2 - 4 \end{cases}. \qquad x \in \left\{2; \log_{3}2 - 4\right\}.$$

Bəzi üstlü və loqarifmik tənlikləri həll edərkən, tənliyə daxil olan funksiyaları araşdırmaq lazım gəlir.

Misal 7. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x} = 2^{x}$ tənliyini həll edin.

Həlli. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, x=2 bu tənliyin köküdür.İsbat edək ki, tənliyin başqa kökü ola bilməz.Bunun üçün verilən tənliyin hər tərəfini 2^x -a bölək.

$$\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}{2^x}+\frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}{2^x}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1.$$

$$0 \prec \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \prec 1, 0 \prec \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \prec 1 \text{ olduğldüüçün } y=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x \text{ v } y=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x$$

funksiyaları monoton azalır.Ona görə də bu funksiyaların cəmi də monoton azalacaq.Buradan çıxır ki, belə funksiyalar istənilən müsbət qiymətlərini yalnız bir nöqtədə alır. Beləliklə, tapılmış x=2 qiyməti verilən tənliyin yeganə kökü olar. $x \in \{2\}$.

Misal 8. $(x+1)9^{x-3}+4x.3^{x-3}-16=0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyi aşağıdakı kimi çevirək:

$(x+1).3^{2(x-3)}+4x.3^{x-3}-16=0$

Bu tənliyi isə 3^{x-3}-dən asılı kvadrat tənlik kimi həll edək.

$$3^{x-3}=\frac{-2x \pm \sqrt{4x^2+16(x+1)}}{x+1}=\frac{-2x \pm (2x+4)}{x+1}$$

$1)3^{x-3}=-4 \Rightarrow x \in \emptyset$

$2)3^{x-3}=\frac{4}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)3^{x+1}=4 \times 3^4$

Aşkardır ki, bu tənliyin həlli x=3-dür.Doğrudan da, $x \prec -1$ olduqda tənliyin həlli yoxdur, $x \succ -1$ olduqda isə $y=(x+1)3^{x+1}$ funksiyası monoton artır və buradan çıxır ki, tapılmış x=3 qiyməti bu tənliyin yeganə həllidir. $x \in \{3\}$.

Misal 9. $log_5(x^3-7)=|x-2|$ tənliyini həll edin.

Həlli.Təyin oblastını tapaq:

$x^3-7 \succ 0 \Rightarrow x^3 \succ 7 \Rightarrow x \succ \sqrt[3]{7}, x \in \left]\sqrt[3]{7};+\infty\right[.$

x=2 nöqtəsi ilə tənliyin təyin oblastını aralıqlara ayıraq və alınmış aralıqların hər birində verilmiş tənliyin həllinə baxaq:

1) $\sqrt[3]{7} \prec x \leq 2$ olarsa, $|x-2|=2-x$ olar və tənliyimiz aşağıdakı şəklə düşər.

$log_5(x^3-7)=2-x$

Asanlıqla yəqin etmək olar ki, x=2 bu tənliyin yeganə köküdür.İsbat edək ki, bu tənliyin başqa kökü yoxdur.Doğrudan da, $y=log_5(x^3-7)$ funksiyası monoton artan, $y=2-x$ funksiyası isə monoton azalan olduğundan, bu funksiyaların qrafikləri ancaq bir nöqtədə kəsişə bilər.

2) $x \succ 2$ olarsa, $|x-2|=x-2$ olar və tənliyimiz aşağıdakı şəklə düşər.

$log_5(x^3-7)=x-2$

Bu halda da, göstərmək olar ki, x=2 qiyməti tənliyin yeganə həllidir.Belə ki, $y=log_5(x^3-7)$ və $y=x-2$ funksiyaları monoton artır və buradan çıxır ki, belə funksiyalar istənilən müsbət qiymətini yalnız bir nöqtədə alır.

Beləliklə, tapılmış x=2 qiyməti verilən tənliyin yeganə kökü olar. $x \in \{2\}$.

Müstəqil həll etmək üçün çalışmalar.

Tənlikləri həll edin:

1. $5^{log_2 x}+2x^{log_2 5}=15$ Cavab: $x \in \{2\}$.
2. $3^{log_3^2 x}+x^{log_3 x}=162$ Cavab: $x \in \{\frac{1}{9};9\}$.
3. $2^{x^2-x}(4^{x+1}-1)=252$ Cavab: $x \in \{2\}$.
4. $8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0$ Cavab: $x \in \{-2;-1;1;2\}$.

5. $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^x + 2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^x = \frac{11}{3}\times 2^{\frac{x}{2}}$ Cavab: $x \in \left(\log_9 \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1};\ \left(\log_{\frac{4}{9}} \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$

6. $5^x \sqrt[x+1]{8^x} = 100$ Cavab: $x \in \{2; \log_5 0{,}1\}$.

7. $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$ Cavab: $x \in \{3\}$.

8. $4^x + (x-1)2^x = 6 - 2x$ Cavab: $x \in \{1\}$.

9. $\log_2\left(x^2+1\right) - \log_2 x = 3x^2 - 2x^3$ Cavab: $x \in \{1\}$.

28 sentyabr 1986-cı il.

İcmal: “Fizika və riyaziyyat tədrisi” № 3.1988