HƏQİQİ ƏDƏDLƏR ÇOXLUĞU

§2.Əsas anlayışlar

1.Çoxluq anlayışı.Çoxluqların verilməsi üsulları.Çoxluq anlayışı riyaziyyatın ilkin anlayışlarından olub tərifə malik deyil. Lakin çoxluq dedikdə bircins və ya bircins olmayan obyektlər toplusu, küllüsü, sistemi başa düşülür.Çoxluğu təşkil edən bu obyektlər çoxluğun ***elementləri (ünsürləri)*** adlanırlar.Riyaziyyatın tədqiqat obyekti ədədlər olduğundan bu kursumuzda elementləri yalnız ədədlərdən ibarət çoxluqları – ***ədədi çoxluqları*** öyrənəcəyik.

Riyaziyyatda çoxluqlar. Adətən böyük hərflərlə, məsələn $\mathrm{A, B, C, D, X, Y, Z, U}, \cdots$ və s., onların elementləri isə uyğun kiçik hərflərlə $a, b, c, d, x, y, z, u, \cdots$ və s. ilə işarə olunurlar. a elementinin A çoxluğunun elementi olması faktı $a \in A$ kimi, A çoxluğunun elementi olmaması faktı isə $a \notin A$ kimi yazılır. Çoxluqlar, adətən aşağıdakı iki üsulla verlirlər :

a) ya çoxluğunun bütün elementləri göstərilməklə fiqurlu mötərizə daxilində $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, yaxud $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$;

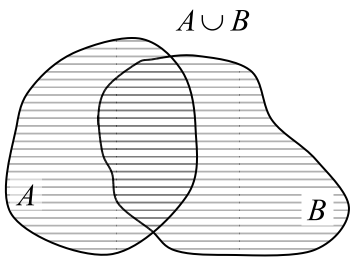
b) ya da yalnız bu çoxluğunun bütün elementlərinə xas olan $P(x)$ xassəsi göstərilməklə $A = \{x : P(x)\}$.

Elementlərinin sayı sonlu olan çoxluq ***sonlu çoxluq***, elementlərinin sayı sonsuz olan çoxluq ***sonsuz çoxluq*** adlanır. Heç bir elementi olmayan çoxluq ***boş çoxluq*** adlanır və Φ kimi işarə olunur. Əgər A çoxluğunun bütün elementləri həm də B çoxluğunun elementləridirsə, onda A çoxluğu B çoxluğunun altçoxluğu adlanır və bu fakt $A \subset B$(və ya $A \subseteq B$) kimi yazılır.İki Əgər A və B çoxluqlarının bütün elementləri bərabərdirsə bu çoxluqlar bərabər çoxluqlar adlanır: $A = B$. $A = B$ olması üçün eyni zamanda həm A çoxluğu B-nin, həm də B çoxluğu A-nın altçoxluğu ($A \subseteq B$ və $B \subseteq A$) olmalıdır. Məsələn, aydındır ki, $A = \{1,2\}$ və $B = \{x : x^2 - 2x + 3 = 0\}$ çoxluqları bərabərdirlər. Elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq olan verilmiş A və B çoxluqları eynigüclü (ekvivalent) çoxluqlar adlanır və $A \sim \mathrm{B}$ kimi yazılır.

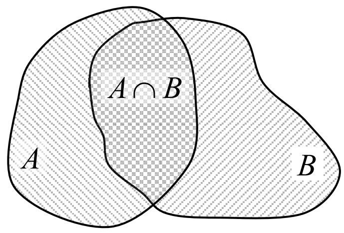
2. Çoxluqlar üzərində əməllər və onların xassələri.

Verilmiş A və B çoxluqlarının ***birləşməsi*** elementləri ya A çoxluğunun, ya da B çoxluğunun elementlərindən ibarət olan çoxluğa deyilir və $A \bigcup B$ kimi işarə olunur.

Verilmiş A və B çoxluqlarının ***kəsişməsi*** elementləri həm A çoxluğunun, həm də B çoxluğunun elementlərindən ibarət olan çoxluğa deyilir və $A \bigcap B$ kimi işarə olunur.Başqa sözlə, A və B çoxluqlarının ***kəsişməsi*** A və B çoxluqlarının ortaq elementlərindən ibarət olan çoxluğa deyilir.

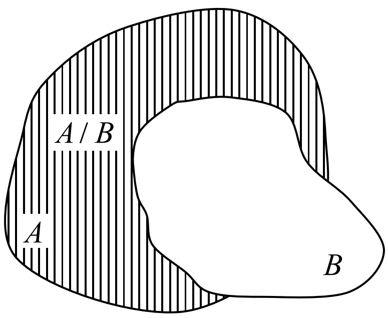


Şəkil 1

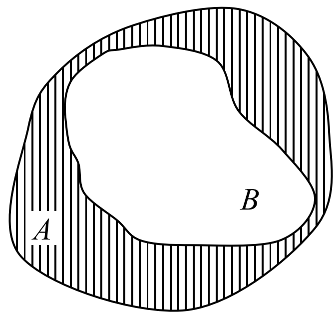


Şəkil 2

Verilmiş A və B çoxluqlarının *fərqi* A çoxluğunun B çoxluğuna daxil olmayan elementlərindən ibarət olan çoxluğa deyilir və $A \setminus B$ kimi işarə olunur. $B \subset A$ olduqda $A \setminus B$ fərqi A çoxluğunun B çoxluğuna ***tamamlanması*** adlanır.



Şəkil 3



Şəkil 4

Çoxluqlar üzərində əməllərin aşağıdakı xassələri var:

1) $A \bigcup B = B \bigcup A$ (birləşmədə kommutativlik xassəsi);

2) $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$ (birləşmədə assosativlik xassəsi);

3) $A \bigcap B = B \bigcap A$ (kəsişmədə kommutativlik xassəsi);

4) $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$ (kəsişmədə assosativlik xassəsi);

5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ və (distributivlik xassələri);

6) $A \cup A = A$;

7) $A \cap A = A$;

8) $A \cup \Phi = \mathrm{A}$.

§2.Həqiqi ədədlər çoxluğu:əsas anlayışlar

3. Həqiqi ədədlərin sonsuz onluq kəsr şəklində göstərilməsi. Həqiqi ədədlər çoxluğu rasional və irrasional ədədlər olmaqla iki çoxluğa bölünürlər. ***Rasional ədədlər*** ixtisar olunmayan m/n şəklində göstərilə bilən ədədlərə deyilir, burada m və $n \neq 0$ şərtini ödəyən tam ədədlərdir. Rasional olmayan hər bir həqiqi ədəd ***irrasional ədəd*** adlanır.

Hər bir rasional ədəd $a, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$ sonsuz onluq kəsri şəklində göstərilə bilir, belə ki, burada a-istənilən tam ədəd, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ isə 0-dan 9-a qədər qiymətlər alan tam ədədlərdirlər $(0 \leq a_n \leq 9)$.

Hər bir rasional m/n ədədi ya tamdır, ya da sonlu və ya sonsuz dövri onluq kəsr şəklində göstərilə bilən ədəddir. İrrasional ədəd isə yalnız sonzuz dövri olmayan onluq kəsr şəklində göstərilə bilər.Məsələn $1/4$ və$1/3$ rasional ədədləri uyğun olaraq $0{,}25$ və$0{,}333\cdots$onluq kəsrləri. irrasional $\sqrt{2}$ və π ədədləri isə dövri olmayan sonsuz $1{,}41421356\cdots$ və $3{,}14159\cdots$ onluq kəsrləri şəklində göstərilirlər.

Hər bir a və b ədələrinə qarşı yeganə qayda ilə onların cəmi adlanan $a+b$ ədədini və hasili adlanan $a \cdot b$ ədədini qarşı qoymaq olar ki. onlar üçün aşağılakı xassələr ödənir:

1. $a+b=b+a$ (toplamada kommutativlik xassəsi);
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (toplamada assosativlik xassəsi);
3. $a \cdot b = b \cdot a$ (vurmada kommutativlik xassəsi);
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (vurmada assosativlik xassəsi);
5. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (toplama və vurmada distributivlik xassəsi);

6. $\exists 0 \ \forall a \qquad a+0=a$ (sıfır elementin varlığı xassəsi);

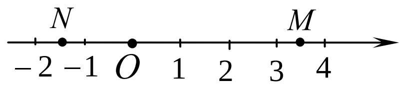
7. $\forall a \quad \exists(-a) \ \ a+(-a)=0$ (əks elementin varlığı xassəsi);

8. .$\exists 1 \ \ \forall a \qquad a \cdot 1 = a$ (vahid elementin varlığı xassəsi);

9. $\forall a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \ \ a \cdot a^{-1} = 1$ (tərs elementin varlığı xassəsi).

Yuxarıda göstərilən 1.-9. xassələri həqiqi ədədlər çoxluğunun aksiomatikası adlanır.

Həqiqi ədələr ədəd oxu adlanan başlanğıc nöqtəsi olan və üzərində parça uzunluğu ölçmək üçün vahid uzunluqlu parça yəni miqyas təyin edilmiş istiqamətlənmiş düz xətt üzərində nöqtələr şəklində təsvir olunurlar. Müstət ədədlər bu ox üzərində başlanğıc adlanan nöqtədən ox istiqamətində,mənfi ədədlər isə başlanğıc adlanan nöqtədən oxun əksi istiqamətində təsvir olunurlar (şəkil 5).



Şəkil 5

§3. Ədədi çoxluqların sərhədləri

Tutaq ki, X -həqiqi ədədlərin boş olmayan çoxluğudur.

Tərif. ***X çoxluğu o halda yuxarıdan (aşağıdan) məhdud çoxluq adlanır ki, istənilən $x \in X$ üçün $x \le c$ $(x \ge c)$ bərabərsizliyini ödəyən c ədədi tapmaq mümkün olsun.***

Bu halda, c ədədi X çoxluğunun ***yuxarı (aşağı)*** sərhəddi adlanır.

Həm yuxarıdan, həm də aşağıdan məhdud olan çoxluq ***məhdud çoxluq*** adlanır.

X çoxluğunun yuxardan (aşağıdan) məhdud edən ədədlərin ən kiçiyi (böyüyü) X çoxluğunun dəqiq yuxarı (dəqiq aşağı) sərhəddi adlanır və $\sup X$ $(\inf X)$ simvolu ilə işarə olunur.

Dəqiq yuxarı (dəqiq aşağı) sərhəddin xassələri. İstənilən qədər kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi üçün, elə $x \in X$ ədədi var ki, $x > \sup X - \varepsilon$ $(x < \inf X + \varepsilon)$ bərabərsizliyi ödənir.

Teorem. ***Yuxardan (aşağıdan) məhdud istənilən boş olmayan ədədi çox-***

luğun dəqiq yuxarı (aşağı) sərhəddi var.

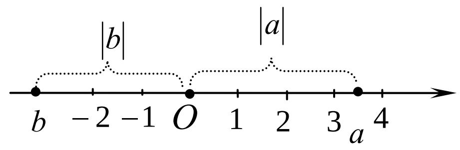
X çoxluğu yuxardan (aşağıdan) məhdud deyilsə, $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$ yazılır.

§4. Həqiqi ədədin mütləq qiyməti

Tərif. ***x ədədinin mütləq qiyməti, $x \geq 0$ olduqda x ədədini özünə. $x < 0$ olduqda isə $(-x)$ ədədinə deyilir.***

x ədədinin mütləq qiyməti $|x|$ simvolu ilə işarə olunur. Beləliklə

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0\,, \\ -x, & x < 0\,. \end{cases}$$



Şəkil 6

Məsələn, $|+5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$; $|0| = 0$.

Mütləq qiymətlərin əsas xassələri:

1) $|x| \geq 0$;

2) $|x| = |-x|$;

3) $-|x| \leq x \leq |x|$,

4) $|x| \leq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ bərabərsizliyi $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ deməkdir;

5) $|x| \geq \alpha$ $(\alpha > 0)$ bərabərsizliyi ya $x \geq \alpha$, ya da $x \leq -\alpha$ deməkdir;

6) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (üçbucaq xassəsi);

7) $|x \pm y| \geq |x| - |y|$;

8) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

9) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.

Kompleks ədədlər və onların həndəsi təsviri

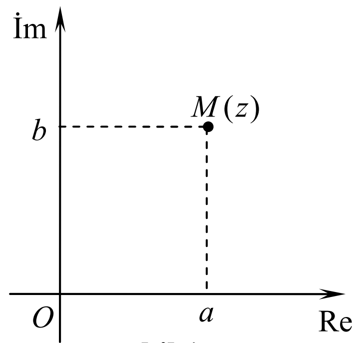
Məlum olduğu kimi, a həqiqi ədədinin kvadratı mənfi olmayan ədəd olduğundan, mənfi ədədin cüt dərəjədən, məsələn 2-ci dərəjədən kökü yoxdur. Çünki, kökalmanın tərifinə görə $\sqrt{-25}$ elə bir c ədədinə bərabər olmalıdır ki, $c^2 = -25$ olsun, bu bərabərliklərin sol tərəfi mənfi olmayan sağ tərəfi isə mənfi ədəd olduğundan, bu bərabərliyi ödəyən həqiqi c ədədi tapmaq mümkün deyil. Lakin kvadratı -1-ə bərabər olan ədədin varlığını qəbul edib onu i ilə işarə etsək və xəyalı vahid adlandırsaq, onda mənfi ədədlərdən də cüt ədəddən kök almaq olar, məsələn $\sqrt{-25} = \sqrt{25\cdot(-1)} = \sqrt{5^2\cdot i^2} = \pm 5i$ alarıq. Bu cür ədədlər sırf xəyali ədədlər adlanır.

<u>Tərif 1.</u> *a* və *b* həqiqi ədədlər olduqda,

$$z = a + ib \tag{1}$$

şəklində göstərilən ədədlərə kompleks ədədlər deyilir. Burada a- z kompleks ədədinin həqiqi hissəsi adlanır və $a = \operatorname{Re} z$ kimi , b- isə z kompleks ədədinin xəyali hissə əmsalı adlanır və $b = \text{İm}\, z$ kimi işarə olunur. (1) bərabərliyində $a = 0$ olduqda $z = ib$ olur ki, bu da sırf xəyalı ədəd, $b = 0$ olduqda isə $z = a$ olur ki, bu da sırf həqiqi ədəd olacaq.

z kompleks ədədi bir cüt həqiqi a və b ədədləri vasitəsilə birqiymətli təyin olunduğundan, həqiqi ədədlərdən fərqli olaraq, kompleks ədədlər bir həqiqi ox vasitəsilə deyil, bir cüt həqiqi ox vasitəsilə, kompleks müstəvidə nöqtə şəklində təsvir olunurlar (şəkil 1).



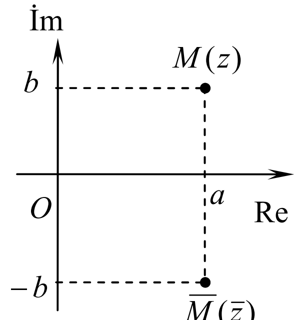
Şəkil 1

Tərif 2. Verilmiş kompleks ədəddən yalnız xəyali hissə əmsalının işarəsilə fərqlənən kompleks ədəd verilmiş kompleks ədədin qoşması adlanır və $\bar{z}$ kimi işarə olunur

$$\bar{z} = a - ib\,. \tag{2}$$

(1) və (2) ayrılışlarından göründüyü kimi, qarşılıqlı qoşma iki kompleks ədəd kompleks müstəvidə həqiqi oxa nəzərən simmetrik $M(a;b)$ və $M_1(a;-b)$

nöqtələri şəklində təsvir olunurlar (şəkil 2).



Şəkil 2

İki kompleks ədəd o halda bərabər adlanır ki, onların həqiqi və xəyalı hissə əmsalları üst-üstə düşsün.

Deməli, z kompleks ədədi o halda sıfıra bərabər olacaq ki, bu kompleks əddin həqiqi hissə və xəyali hissə əmsalı üçün $a=0$ və $b=0$ bərabərlikləri ödənsin. $z \neq 0$ olduqda a və b ədədləri eyni zamanda sıfra bərabər ola bilməz $(a^2+b^2 \neq 0)$.

z kompleks ədədinin (1) bərabərliyi z kompleks ədədinin hesabi şəklidə yazhılışı adlanır.

Kompleks ədədlər üzərində hesab əməlləri

İki kompleks ədədin cəmi

Fərz edək ki, hesabi

$$z_1 = a_1 + ib_1 \tag{1}$$

və

$$z_2 = a_2 + ib_2 \tag{2}$$

şəklində z_1 və z_2 kompleks ədədləri verilmişdir, $a_1 = \operatorname{Re} z_1$, $a_2 = \operatorname{Re} z_2$, $b_1 = İm\, z_1$, $b_2 = İm\, z_2$. Bu z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $z_1 + z_2$ cəminə baxaq.

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$a_1 + a_2 = a,\ b_1 + b_2 = b$ işarə etsək, sonuncu bərabərlikdən

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = a + ib$$

kompleks ədədi alınar ki, bu kompleks ədədi də z ilə işarə etsək, verilmiş z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $z_1 + z_2$ cəminin elə z kompleks ədədinə bərabər olduğunu alarıq ki, bu kompleks ədədin həqiqi hissəsi a verilmiş kompleks ədədlərin a_1 və a_2 həqiqi hissələrinin cəminə $a = a_1 + a_2$, b xəyali hissə əmsalı isə verilmiş kompleks ədədlərin b_1 və b_2 xəyali hissə əmsallarının cəminə $b = b_1 + b_2$ bərabər olsun:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z, \\ \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 . \end{array}\right\} \tag{3}$$

Deməli, *verilmiş* z_1 *və* z_2 *kompleks ədədlərinin cəmi elə kompleks ədədə deyilir ki, onun həqiqi hissəsi, verilmiş kompleks ədədlərinin həqiqi hissələrinin cəminə, xəyali hissə əmsalı isə xəyali hissə əmsallarının cəminə bərabər olsun.*

İki kompleks ədədin fərqi

İndi isə, uyğun olaraq, (1) və (2) hesabi şəkillərində verilmiş z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $z_1 - z_2$ cəminə baxaq.

$$z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

olduğundan, $a_1 - a_2 = a,\ b_1 - b_2 = b$ işarə etsək, sonuncu bərabərlikdən

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i = a + ib$$

kompleks ədədi alınar ki, bu kompleks ədədi də z ilə işarə etsək, verilmiş z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $z_1 - z_2$ cəminin elə z kompleks ədədinə bərabər olduğunu alarıq ki, bu kompleks ədədin həqiqi hissəsi a verilmiş kompleks ədədlərin a_1 və a_2 həqiqi hissələrinin fərqinə $a = a_1 - a_2$, b xəyali hissə əmsalı isə verilmiş kompleks ədədlərin b_1 və b_2 xəyali hissə əmsallarının fərqinə $b = b_1 - b_2$ bərabər olsun:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_1 - z_2) &= \mathrm{Re}\, z_1 - \mathrm{Re}\, z, \\ \mathrm{Im}(z_1 - z_2) &= \mathrm{Im}\, z_1 - \mathrm{Im}\, z_2\ . \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Deməli, *verilmiş* z_1 *və* z_2 *kompleks ədədlərinin cəmi elə kompleks ədədə deyilir ki, onun həqiqi hissəsi, verilmiş kompleks ədədlərinin həqiqi hissələrinin fərqinə, xəyali hissə əmsalı isə xəyali hissə əmsallarının fərqinə bərabər olsun.*

İki kompleks ədədin hasili.

Uyğun olaraq, (1) və (2) hesabi şəkillərində verilmiş z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $z_1 \cdot z_2$ hasilinə baxaq.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

(burada $i^2 = -1$ bərabərliyi də nəzərə alınmışdır) olduğundan, $a_1a_2 - b_1b_2 = a,\ a_1b_2 + a_2b_1 = b$ işarə etsək, sonuncu bərabərlikdən

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = a + ib$$

kompleks ədədi alınar ki, bu kompleks ədədi də z ilə işarə etsək, verilmiş z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $z_1 \cdot z_2$ hasilinin elə z kompleks ədədinə bərabər olduğunu alarıq ki, bu kompleks ədədin həqiqi hissəsi a və xəyali hissə əmsalı b verilmiş kompleks ədədlərin a_1, a_2 həqiqi hissələri və b_1, b_2 xəyali hissə əmsalları vasitəsi ilə

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1a_2 - b_1b_2, \\ b &= a_1b_2 + a_2b_1 \end{aligned}\right\}$$

şəkildə ifadə olunsun.Sonuncu bərabərliyi açıq şəkildə

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) &= \mathrm{Re}\, z_1 \cdot \mathrm{Re}\, z_2 - \dot{I}m\, z_1 \cdot \dot{I}m\, z_2, \\ \mathrm{Im}(z_1 - z_2) &= \mathrm{Re}\, z_1 \cdot \dot{I}m\, z_2 + \dot{I}m\, z_1 \cdot \mathrm{Re}\, z_2\ . \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

şəklində də yazmaq olar

Deməli, *verilmiş* z_1 *və* z_2 *kompleks ədədlərinin hasili i elə kompleks ədədə deyilir ki, onun həqiqi hissəsi, verilmiş birinci kompleks ədədlərinin həqiqi hissələrinin hasili ilə xəyali hissə əmsallarının hasilləri fərqinə,xəyali hissə əmsalı isə birincinin həqiqi hissəsi ilə ikincinin xəyali hissə əmsalının və ikincinin həqiqi hissəsi ilə birincinin xəyali hissə əmsalının hasilləri cəminə bərabər olsun.*

Göstərmək olar ki, qarşılıqlı qoşma iki kompleks ədədin hasili həmişə həqiqi ədəddir.Tutaq ki, $z = a + ib$ kompleks ədədi verilib. Onda bu kompleks ədədə qoşma olan ədəd $\bar{z} = a - ib$ kompleks ədədi olacaq. İki kompleks ədədin hasili qaydasına əsasən. Bu iki qoşma kompleks ədədin hasili

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$$

ədədinə bərabər olacaq ki, bu da sırf həqiqi ədəddir.

İki kompleks ədədin nisbəti.

Fərz edək ki,uyğun olaraq, hesabi (1) və (2) şəklində z_1 və z_2 kompleks ədədləri verilmişdir və $z_2 \neq 0$ (yəni $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$) şərti ödənir. Bu kompleks ədədlərin $\frac{z_1}{z_2}$ nisbətinə baxaq. Bu nisbətin surət və məxrəcini z_2 kompleks ədədinin $\bar{z}_2 = a_2 - ib_2$ qoşmasına vursaq

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2-ia_1b_2+ia_2b_1-i^2b_2b_1}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

alarıq ki, $\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}=a,\ \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}=b$ işarə etməklə, sonuncu bərabərlikdən

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}=a+ib$$

kompleks ədədi alınar ki, bu kompleks ədədi də z ilə işarə etsək, verilmiş z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $\frac{z_1}{z_2}$ nisbətinin elə z kompleks ədədinə bərabər olduğunu alarıq ki, bu kompleks ədədin həqiqi hissəsi a və xəyali hissə əmsalı b verilmiş kompleks ədədlərin a_1, a_2 həqiqi hissələri və b_1, b_2 xəyali hissə əmsalları vasitəsi ilə

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\\ b&=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\end{aligned}\right\}$$

şəkildə ifadə olunsun.Sonuncu bərabərliyi açıq şəkildə

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)&=\frac{\operatorname{Re} z_1\cdot\operatorname{Re} z_2+\dot{I}m\, z_1\cdot\dot{I}m\, z_2}{(\operatorname{Re} z_2)^2+(\dot{I}m\, z_2)^2},\\ \dot{I}m\left(\frac{z_1}{z_2}\right)&=\frac{\operatorname{Re} z_2\cdot\dot{I}m\, z_1-\operatorname{Re} z_1\cdot\dot{I}m\, z_2}{(\operatorname{Re} z_2)^2+(\dot{I}m\, z_2)^2}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

şəklində də yazmaq olar

Kompleks ədədin qüvvətə yüksəldilməsi üçün Muavr düsturu.

Tutaq ki, sıfırdan fərqli olan $z=a+ib$ kompleks ədədi verilib, yəni $a^2+b^2\neq 0$ şərti ödənir.Bu komples ədədi $a^2+b^2\neq 0$ ədədinə vurub bölsək

$$z=a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{a+ib}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

alarıq.

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|a|}{\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1 \text{ və } \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|b|}{\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|} = \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$$ ol-

duğundan $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\psi$ işarə etmək olar.

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \equiv 1$$ olduğundan $\psi = \varphi$,

yəni

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$ olacaq ki, $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ işarə etsək $z = a+ib$

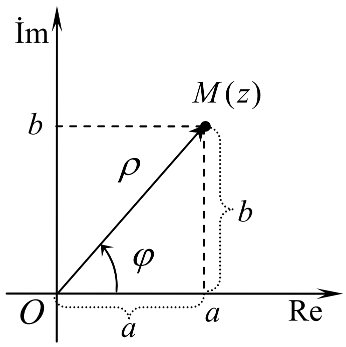
kompleks ədədi üçün $z = a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

bərabərliyini almış olarıq, harada ki. $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $tg\,\varphi = \frac{b}{a}$ və ya

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = arctg\frac{b}{a}$ kimi təyin olunur.

$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ifadəsi $z = a+ib$ kompleks ədədinin triqonometrik şəkli adlanır, burada $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ ədədi z kompleks ədədinin modulu adlanır və $\rho = |z|$ kimi, $\varphi = arctg\frac{b}{a}$ ədədi isə z kompleks ədədinin arqumenti adlanır və $\varphi = Arg.z$ işarə olunur.

z kompleks ədədinin modulu, həndəsi olaraq, həqiqi və xəyali oxun kəsişmə nöqtədən bu z ədədinin təsvir olunduğu nöqtəyədək olan istiqamətlənmiş parçanın uzunluğunu, z kompleks ədədinin arqumenti olan φ bucağı isə bu istiqamətlənmiş parçanın həqiqi oxun müsbət istiqamətilə saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində əmələ gətirdiyi bucağı ifadə edir (şəkil 3).



Şəkil 3

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ\right)$

$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\varphi = 315^\circ$

İki kompleks ədədin hasili

Fərz edək ki, triqonometrik

$z_1 = \rho_1 \left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ (6)

və

$z_2 = \rho_2 \left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$ (7)

şəklində z_1 və z_2 kompleks ədədləri verilmişdir, $\rho_1 = |z_1|$, $\varphi_1 = Arg\, z_1$, $\rho_2 = |z_2|$, $\varphi_2 = Arg\, z_2$. z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $z_1 \cdot z_2$ hasilinə baxsaq

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$+ i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] = \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) +$$
$$+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\ ,$$

$\rho = \rho_1\rho_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ işarə etməklə isə, sonuncu bərabərlikdən

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

alırıq. Bu kompleks ədədi $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ilə işarə etsək , uyğun olaraq triqonometrik (6) və (7) şəklində verilmiş z_1 və z_2 kompleks ədədlərinin $z = z_1 z_2$ hasili üçün

$$\left.\begin{array}{l} |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ Arg\ (z_1 \cdot z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2 \end{array}\right\} \quad (8)$$

düsturunu alırıq.

Deməli, *triqonometrik şəklində verilmiş iki kompleks ədədin hasilinin modulu verilmiş kompleks ədədlərin modulları hasilinə, arqumenti isə arqumentləri cəminə bərabərdir.*

Tutaq ki, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks ədədi verilib.Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlərin hasili üçün yuxarıda göstərilən qaydanı bu kompleks ədədin $z^2, z^3, \cdots, z^n, \cdots$ qüvvətlərinə tətbiq etsək

$$z^2 = z \cdot z = \rho^2 \left(\cos(\varphi + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi)\right) = \rho^2 (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

$$z^3 = z \cdot z^2 = \rho^3 \left(\cos(2\varphi + \varphi) + i\sin(2\varphi + \varphi)\right) = \rho^3 (\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi), \text{ və s.}$$

$$z^n = \rho^n [\cos n\varphi + i\sin n\varphi] = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$$

düsturlarını almış olarıq. $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ olduğunu nəzərə alsaq,sonuncu bərabərlikdən

$$\left[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \rho^n\left[\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right] \quad (9)$$

düsturu alınır.(9) düsturu ***n-ci dərəcədən Muavr düsturu*** adlanır.

Xüsusi halda $n=-1$ olduqda, (9) düsturundan

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \rho^{-1}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right] = \frac{1}{\rho}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right]$$

alınır ki, bu halda (6) və (7) şəklində verilmiş iki kompleks ədədin nisbəti üçün

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \quad (10)$$

bərabərliyi alınır.

Lakin kompleks ədədin n-ci dərəcədən qüvvətə yüksəldilməsindən fərqli olaraq, n-ci dərəcədən kökünün hesablanması zamanı $\sin\varphi = \sin(\varphi + 2\pi k)$, $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2\pi k)$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots$ bərabərliklərinin nəzərə alınması vacibdir.

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho\left[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)\right], \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots \quad (11)$$

bu z kompleks ədədin n –ci dərəcədən kökü üçün

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left\{\rho\left[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)\right]\right\}^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right] =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right] = z_k, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3, \cdots \quad \textbf{(12)}$$

düsturu alınır.

(12) bərabərliyindən göründüyü kimi, z kompleks ədədinin n-ci dərəcədən kökü yalnız $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ qiymətlərində bir-birindən fərqli $z_0,\ z_1, z_2, \ldots.., z_{n-1}$ qiymətləri alacaq. Qalan digər qiymətlər bu $z_0,\ z_1, z_2, \ldots.., z_{n-1}$ qiymətlərinin təkrarı olacaq.

Deməli, ***kompleks ədədinin*** n***-ci dərəcədən kökünün bir-birindən fərqli yalnız*** n ***sayda qiyməti var, qalan qiymətlər bu qiymətlərin təkrarıdır.***

Matrislər və onlar üzərində əməllər.

$n \times m$ sayda $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}$ ədədlərindən düzəldilmiş

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şəklində cədvəl $n \times m$ ölçülü düzbucaqlı matris adlanır. Göründüyü kimi, matris sətr və sütunlardan ibarətdir. Matrisi təşkil edən elementlər, adətən ikiqat indekslə işarə olunur, belə ki, matrisin a_{ij} elementi bu elementin verilmiş matrisin i-ci sətri ilə j-ci sütununun kəsişməsində yerləşdiyini göstərir. Matrislər adətən onun elementlərinin işarə olunduğu böyük hərflə işarə olunur. matrisdə Sətrlərinin sayı sütunlarının sayına bərabər olan matris kvadrat matris adlanır. Məsələn, sətrlərinin m sayı sütunlarının n sayına bərabər olan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi n ***tərtibli kvadrat matris***. a_{11}, a_{22}, ...a_{nn} elementləri isə bu n tərtibli kvadrat matrisin ***baş dioqnal elementləri*** adlanır.

Kvadrat matrisdə baş dioqnal elementlərindən ya yuxarıdan, ya da aşağıdakı elementərin hamısı bərabər olan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi üçbucaq matris, baş dioqnal elementlərindən həm aşağı, həm yuxarıda duran elementlərinin hamısı sıfıra bərabər olan, yəni yalnız baş dioqnal elementlərindən ibarət

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi isə dioqnal matris adlanır.Bütün elementləri vhidə bərabər olan dioqnal maris vahid matris adlanır və E ilə işarə olunur.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$m\times n$ ölçülü düzbucaqlı matrisdə sütunların sayı 1-ə bərabər olan ölçülü sütun matris adlanır.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

m ölçülü sütun matris, sətirlərinin sayı 1-ə bərabər olan $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{1n})$ matrisi isə n ölçülü sətr matris adlanır.

Bütün elementləri sıfırlardan ibarət olan matris sıfr matris adlanır.

İki $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ və $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ matrisləri, o halda bərabər adlanır ki, onların ölçüləri bərabər olmaqla uyğun elementləri üst-üstə düşsün: $a_{ij}=b_{ij}$, $i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$.

Matrislər üzərində xətti əməllər

Eyni ölçülü iki matrisi toplamaq, çıxmaq, matrisi ədədə vurmaq olar. Matrislər üzərində bu əməllər matrislər üzərində xətti əməlləradlanır.

Matrislərin toplanması

Eyni olçülü $A=\left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$ və $B=\left(b_{ij}\right)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$ matrislərinin cəmi bu ölçülü elə $C=\left(c_{ij}\right)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$ matrisinə deyilir ki, istənilən $i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$ qiymətlərində $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ bərabərliyi ödənsin. Başqa sözlə, eyni olçülü iki $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ və

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ matrislərinin cəmi $C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

matrisinə deyilir.

Yəni ***eyni olçülü matrislərin cəmi uyğun elementlərinin cəmlərindən ibarət olan matrisə deyilir.***

Ədədlərin toplanmasında $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ kommutativlik, $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ assosativlik xassələrinin ödənməsindən, matrislərin toplanmasında da kommutativlik və assosativlik xassələri ödənməsi alınır:

1. $A+B=B+A$ kommutativlik xassəsi;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ assosativlik xassəsi.

Matrisin ədədə vurulması

Tutaq ki, $m\times n$ ölçülü düzbucaqlı $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matrisi və λ həqiqi ədəddi verilmişdir. A matrisinin λ həqiqi ədədinə vurulması, bu matrisin hər bir elementinin verilmiş λ ədədinə hasilindən ibarət olan matrisə deyilir

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

başqa sözlə, ***matrisi ədədə vurmaq üçün matrisin hər bir elementini həmin ədədə vurmaq lazımdır.***

Matrisin ədədə vurulması zamanı

1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ *(matrislərin cəminə nəzərən distributivlik);*

2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ *(ədədi vuruqların cəminə nəzərən distributivlik)*

xassələri doğrudur

Matrislərin çıxılması

Eyni ölçülü iki A və B matrislərinin $A-B$ fərqi $A+(-1)B$ matrisinə deyilir.Eyni $m \times n$ ölçülü

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ və } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrislərinin $A-B$ fərqi üçün

$$A - B = A + (-1)B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \cdots & -b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

düsturunu alırıq. Yəni ***eyni olçülü matrislərin fərqi bu matrislərin uğun elementlərinin fərqlərindən ibarət olan matrisə deyilir.***

İki matrisin hasili

Tutaq ki, $m \times k$ ölçülü düzbucaqlı $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}$ və $k \times n$ ölçülü düzbucaqlı

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$ matrisləri verilmişdir; A matrisinin sütunlarının (yəni sətr elementlərinin) sayı B matrisinin sətrlərinin (yəni sütun elementlərinin) sayına bərabərdir.

Bu cür A və B matrislərinin AB hasili elə $C = \left(c_{ij}\right)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$ matrisinə deyilir ki, bu matrisin i-ci sətrlə j-ci sütununun kəsişməsində duran c_{ij} elementi A matrisinin i-ci sətr B matrisinin isə j-ci sütun elementlərinin hədbəhədd hasilləri cəminə bərabər olsun:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots\dots + a_{ik}b_{kj} \qquad i = 1, 2, \cdots, m;\ j = i = 1, 2, \cdots, n\,. \qquad (1)$$

Göstərmək olar ki, $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$, yəni iki matrisin hasilində komutativlik xassəsi ödənmir. odur ki, iki matrisin hasilində hansı matrisin digərinə sağdan və ya soldan vurulmasının böyük əhəmiyyəti var.

$A \cdot B$ hasili A matrisinin B matrisinə soldan hasili, $B \cdot A$ hasili isə A matrisinin B matrisinə sağdan hasili adlanır.Vahid E matrisi üçün

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

bərabərliyi doğrudur, yəni vahid matrisə soldan və ya sağdan hasillər bərabərdir.

Bundan əlavə matrislərin cəmi və hasili üçün

$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;

$C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$

distributivlik xassələri doğrudur.

(

2 və 3 tərtibli determantlar.

Tutaq ki, üçtərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \left(\textbf{ikitərtibli} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

kvadrat matrisi verilmişdir. Bu kvadrat matrisin hədlərindən düzəlmiş

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \right)$$

ifadəsi üçtərtibli (ikitərtibli) determinant adlanır və

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$$

kimi işarə olunur:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1)$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \right) \qquad (2)$$

Üçtərtibli determinantın (1) ayrılışından dən göründüyü kimi, üçtərtibli determinant 6 toplananın cəmindən ibarətdir. Bu toplananlardan 3-ü «+» işarə ilə, digər 3-ü isə «-» işarə ilə götürülmüşlər. Üçtərtibli determinantın «+» və «-»

işarələrlə götürülmüş toplananlarında vuruqları təyin etmək üçün çox vaxt «üçbucaq» qaydası adlanan aşağıdakı qaydadan istifadə edilir.

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

İkitərtibli determinantlar üçün açılın qaydası bir qədər sadə olub, ***ikitərtibli determinant baş dioqonal elementləri hasili ilə köməkçi dioqonal elementlərinin hasilləri fərqinə bərabərdir***, kimi ifadə olunur.

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Determinantın əsas xassələri.

Üçtərtibli determinantın, əslində bütün tərtib determinantlara aid olan xassələri öyrənək. Bu xassələri düstur şəklində əyani nümayiş etdirmək üçün, üçtərtibli determinantın sütun elementlərini müxtəlif hərflərlə işarə edək. Üçtərtibli determinantın (1) ayrılışından

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - b_1 a_2 c_3 \qquad (3)$$

düsturunu alarıq.

Xassə 1. ***Determinantın sətr elementlərinin onun uyğun sütun elementləri ilə əvəz etdikdə determinant dəyişməz:***

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} . \qquad (4)$$

(4) bərabərliyinin isbatı, bu düsturun hər iki tərəfində duran üçtərtibli determinantlara bu determinantların açılmışı üçün (3) düsturu nu tətbiq etməklə bilavasitə alınır:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - b_1 a_2 c_3 \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - a_2 b_1 c_3 \quad .$$

Determinantların bu xassəsi, determinantda sətr və sütunlarının bərabər hüquqlu olduqlarını və determinantın hər hansı sütununa aid edilən xassənin onun sətrinə də aid edilməli olduğunu göstərir.

Xassə 2. ***Determinantda hər hansı iki sütünun (və ya sətrin) yerini dəyişdikdə determinant işarəsini əksinə dəyişir***:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad . \tag{5}$$

Bu xassənin də isbatı, 1-ci xassənin isbatı kimi, (5) bərabərliyin hər iki tərəfində duran determinantlara (3) düsturunu tətbiq etməklə bilavasitə alınır.

Xassə 3. ***Hər hansı iki sütun və ya sətr elementləri eyni olan determinant sıfra bərabərdir:***

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 . \tag{6}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ işarə edib, bu determinanta determinantın yuxarıda göstərilən 2-ci xassəsini tətbiq etsək,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta$$, buradan isə $2\Delta = 0$, yaxud $\Delta = 0$ alarıq.

Xassə 4. ***Determinantın hər hansı sütun (və ya sətir) elementlərinin myəyyən λ ədədinə vurulmasından alınan determinant elə həmin determinantın bu λ ədədinə hasilinə bərabərdir:***

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} . \qquad (7)$$

(7) bərabərliyinin də isbatı, bu bərabərliyin hər iki tərəfində duran determinantlara (3) düsturunu tətbiq etməklə alınır.

Bu xassə, çox zaman, determinantın ədədə vurulması qaydası da adlanır: ***determinantı ədədə vurmaq üçün, onun hər hansı bir sütun və ya sətr elementlərini λ ədədinə vurmaq kifayətdir***.

Xassə 5. ***Hər hansı bir sütun (və ya sətr) elementləri sıfra bərabər olan determinant sıfra bərabərdir:***

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (8)$$

Doğrudan da, determinantın 4-cü xassəsinə əsasən

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \cdot b_1 & c_1 \\ a_2 & 0 \cdot b_2 & c_2 \\ a_3 & 0 \cdot b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

alırıq.

Xassə 6. ***Hər hansı iki sütun (və ya sətr) elementləri mütənasib olan determinant sıfra bərabərdir***:

məsələn,

$$\frac{b_1}{c_2} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} = \lambda \qquad (9)$$

olduqda, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ olacaq.

doğrudanda, (9) bərabərliklərindən $b_1 = \lambda c_1, b_2 = \lambda c_2, b_3 = \lambda c_3$ alırıq ki, bu bərabərlikləri də verilmiş determinantda nəzərə alıb, ona determinantların əvvəl 4-cü, daha sonra isə 3-cü xassələrini tətbiq etməklə

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \lambda c_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda c_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$$

alırıq.

Xassə 7. ***Determinantın hər hansı bir sütun (və ya sətir) elementləri iki toplanan cəmindən ibarətdirsə, bu determinant elə iki determinantın cəminə bərabərdir ki, 1-ci determinantda həmin sütun (və ya sətir) elementlərində birinci toplananlar, 2-ci determinantda isə həmin sütun (və ya sətir) elementlərində ikinci toplananlar dursunlar və bu zaman determinantların qalan sütun (və ya sətir) elementləri dəyişməz qalacaq***:

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} . \qquad (10)$$

Bu bərabərliyin də isbatı, onun hər iki tərəfində yazılan determinantlara (3) düsturunu tətbiq etməklə, bilavasitə alınır.

Xassə 8. ***Determinantın hər hansı bir sütun (və ya sətr) elementlərinin müəyyən λ ədədinə vurularaq digər bir sütun (və ya sətr) elementlərinin üzərinə gəlinməsindən alınan determinant dəyişmir***:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + \lambda a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + \lambda a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + \lambda a_3 \end{vmatrix} . \qquad (11)$$

Doğrudan da, determinanların əvvəl 7-ci, daha sonra isə 4-cü və 3-cü xassələrini tətbiq etməklə

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+\lambda a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+\lambda a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+\lambda a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda a_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda a_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \cdot 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

bərabərliyini alırıq.

Determinantda minor və cəbri tamamlayıcı anlayışları.

Determinantın qalan xassələrini ifadə etmək üçün determinantda minor və cəbri tamamlayıcı anlayışları ilə tanış olaq. Bunun üçün determinantın elementlərinin ikiqat indekslə işarələnməsinə qayıdaq.

Fərz edək ki, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ üçtərtibli determinantı verilmişdir.

Determinantın a_{ij} elementinin minoru, determinantda bu elemenin yerləşdiyi i-ci sətri və j-ci sütunu sildikdən sonra qalan determinanta deyilir və M_{ij} ilə işarə olunur.Məsələn, verilmiş determinantda a_{11} elementinin M_{11} minoru $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, a_{12} elementinin M_{12} minoru $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, a_{21} elementinin M_{21} minoru $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, və s. kimi hesablanır

Determinantın a_{ij} elementinin cəbri tamalayıcısı isə onun M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$ ədədinə hasilinə deyilir və determinantın elementinin özünün işarə olunduğu əlifbanın böyük hərfi ilə edilir

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad . \qquad (12)$$

(12) bərabərliyindən göründüyü kimi, determinantın elementinin yerləşdiyi sətr və sütunun nömrələrinin cəmi təksə cəbri tamamlayıcı minorun mənfi işarə ilə götürülmüş qiymətinə, cütsə minorun özünə bərabərdir.

Determinantın sətr və sütün elementlərinə görə ayrılışı.

Determinantın qalan xassələrinin düstur şəklində ifadə edilməsi üçün determinantın sütun elementlərinin müxtəlif həriflərlə işarələnməsinə, yəni (3) ayrılışına qayıdaq.

Xassə 9. ***Determinantın hər hansı bir sütun (və ya sətr) elementlərinin öz cəbri tamalayıcılarına hasilləri cəmi determinantın özünə bərabərdir***:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3\,; \\ b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3\,; \\ c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3\,; \\ a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1\,; \\ a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2\,; \\ a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3\,. \end{cases} \qquad (13)$$

(13) bərabərliklərindən, məsələn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

bərabərliyini göstərmək üçün, üçtçrtibli determinantın (3) ayrılışını aşağıdakı şəkildə qruplaşdıraq

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\, b_2c_3 + a_2b_3c_1 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - b_1a_2c_3 = a_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) +$$

$$+ a_2\left(b_3c_1 - b_1c_3\right) + a_3\left(b_1c_2 - b_2c_1\right) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

alarıq. Minorlar üçün $M_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, cəbri tamamlayıcılar üçün isə $A_1 = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}, A_2 = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21}, A_3 = (-1)^{3+1}M_{31} = M_{31}$ bərabərliklərini nəzərə alsaq, sonuncu bərabərlikdən isbatı tələb olunan

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 M_{11} - a_2 M_{21} + a_3 M_{31} = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$$

bərabərliyini alarıq.

Bu xassə determinantın sətr və sütün elementlərinə görə ayrılışı xassəsi adlanır bu kursumuzda daxil etmədiyimiz daha yüksək tərtibli, məsələn dörd və beş tərtibli determinantların hesablanmasında istifadə olunur. Məsələn, dördtərtibli

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

determinantının, məsələn 2-ci sətr elementlərinə nəzərən ayrılışında sağ tərəfində bu sətr elementlərinin A_2, B_2, C_2, D_2 cəbri tamamlayıcılarının (yəni yalnız üçtərtibli determinanların) daxil olduğu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 + d_2 D_2 \qquad (14)$$

bərabərliyini alırıq ki,bu cəbri tamamlayıcıların daha az saydasını hesablamaq üçün, belə determinantları daha çox sayda sıfır elementi olan sərt və ya sütun elementlərinə nəzərən ayırmaq labüddüyünü göstərir.

Xassə 10. ***Determinantın hər hansı bir sütun (sətr) elementlərinin digər sütun (sətr) elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına hasilləri cəmi sıfra bərabərdir***:

$$\begin{aligned} &a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0; \quad a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0; \\ &b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0; \quad b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0; \\ &c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0; \quad c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0; \\ &a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0; \quad a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 = 0; \\ &a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 = 0; \quad a_2 A_3 + b_2 B_3 + c_2 C_3 = 0; \\ &a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1 = 0; \quad a_3 A_2 + b_3 B_2 + c_3 C_2 = 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

(15) bərabərliklərindən birini, məsələn $a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0$ bərabərliyini göstərək. Verilmiş $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ determinantının 2-ci sütun elementlərinə nəzərən ayrılışı olan

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$$

ifadəsində $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3$ qəbul etməklə, isbatı tələb olunan

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

bərabərliyini alarıq.

Adətən, determinantın son iki xassəsi birləşdirilərək, ***determinantın hər hansı sütun (və ya sətr) elementlərinin öz cəbri tamamlayıcılarına hasilləri cəmi determinantın özünə, digər sütun (və ya sətr) elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına hasilləri cəmi isə sıfra bərabərdir*** şəklində ifadə edilir.

Tərs matris anlayışı.Tərs matrisin tapılma alqoritmi.

Tutaq ki, hər hansı A matrisi verilib. $A \cdot B = E$ bərabərliyini ödəyən B matrisi verilmiş A matrisinin ***tərsi*** adlanır və A^{-1} kimi işarə olunur .Cöstərmək olar ki,

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

bərabərliyi doğrudur, yəni ***verilmiş matrisin özünün tərs matrisinə həm soldan, həm də sağdan hasili vahid matrisə bərabərdir.***

Fərz edək ki, n tərtibli kvadrat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

matrisi verilmişdir.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

determinantı sıfırdan fərqli olan A ***matrisi cırlaşmayan, əks tədqirdə isə cırlaşan matris adlanır.***

n tərtibli hər bir çırlaşmayan (1) matrisinin tərsi var və onun tərsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

düsturu ilə tapılır;burada Δ verilmiş A matrisinin sıfırdan fərqli determinantı A_{ij} ədədləri isə bu determinantın a_{ij} elementlərinin cəbri tamamlayıcılarıdırlar.(3) bərabərliyini

S.Y. Əliyev. Ali riyaziyyat kursundan mühazirələr. Bakı, 2007

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

şəklində də yazmaq olar.

(4) düsturundan göründüyü kimi, verilmiş çırlaşmayan matrisin tərsini tapmaq üçün ***əvvəl bu matrisin hər elementinin yerinə öz cəbri tamamlayıcılarını yazıb, sonra alınmış matrisin sətr elementlərini uyğun sütun elementləri ilə əvəz etmək və daha sonra bu matrisi verilmiş matrisin determinantının tərs qiymətinə vurmaq lazımdır.***

Üç məchullu, üç xətti tənliklər sistemi. Krater qaydası.

Üç x, y, z məchullarının hər birinin xətti daxil olduqları üç tənliyin əmələ gətirdiyi sistem üçməchullu üç xətti cəbri tənliklər sistemi adlanır və ümumi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \qquad (1)$$

şəkildə yazılır, burada $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ ədədləri (yəni məchulların əmsalları) (1) sisteminin əmsalları, d_1, d_2, d_3 ədədləri isə sistemin sərbəst hədləri adlanır.

(1) sisteminin sərbəst hədləri sıfra bərabər olsa, onda (1) sistemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

şəklinə düşür ki, bu da üç məchullu üç xətti cəbri bircinsli tənliklər sistemi adlanır. (1) sisteminin özü isə qeyri bircinsli və ya bircinsli olmayan, xətti tənliklər sistemi adlanır. (1) sisteminin həlli nizamlanmış elə (x_0, y_0, z_0) üçlüyünə deyilir ki,

$x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ olduqda (1) sisteminə daxil olan tənliklərin hər üçü eynilik kimi ödənsin

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 \equiv d_1; \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 \equiv d_2; \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 \equiv d_3. \end{cases}$$

(1) sisteminin əmsallarından düzəldilmiş

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

determinantnı (1) sisteminin əsas determinantı, əsas determinantda uyğun olaraq, x-in, y-in və z-in əmsallarının sərbəst d_1, d_2, d_3 sərbəst hədləri ilə əvəz olunmasından alınan

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

determinantlarını isə (1) sisteminin köməkçi determinantları adlandıraq.(1) sisteminin əsas Δ determinantının a_1, a_2, a_3 elementlərinin cəbri tamamlayıcılarını, uyğun olaraq, A_1, A_2, A_3 ilə işarə edib (1) sisteminin 1-ci tənliyini A_1-ə, 2-ci tənliyini A_2-yə, 3-ci tənliyini isə A_3-ə vurub tərəf-tərəfə toplasaq

$$a_1A_1x + b_1A_1y + c_1A_1z + a_2A_2x + b_2A_2y + c_2A_2z + a_3A_3x + b_3A_3y + c_3A_3z = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3,$$

bu bərabərliyi x, y və z dəyişənlərinə nəzərən qruplaşdırdıqda isə

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)y + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)z = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3$$

bərabərliyini alarıq.Determinantların 9-cu və 10-cu xassələrinə əsasən

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = \Delta;$$
$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0;$$
$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$$

oldubundan, sonuncu bərabərlikdən

$$\Delta \cdot x = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 \qquad (5)$$

bərabərliyini alırıq. (10 sisteminin köməkçi Δ_x determinantını 1-ci sütun elementlərinə nəzərən ayırsaq və $D_1 = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = A_1$, $D_2 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = A_2$ və $D_3 = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = A_2$ olduğundan, bərabərliyini

$$\Delta_x = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3$$

bərabərliyini alırıq ki, bunu da (5) bərabərliyində nəzərə alsaq, onunla eynigüclü

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \qquad (6)$$

bərabərliyini alarıq.

Əgər (1) sisteminin 1-ci tənliyini A_1-ə, 2-ci tənliyini A_2-yə, 3-ci tənliyini isə A_3-ə deil, B_1, B_2, B_3-ə və C_1, C_2, C_3-ə vurub tərəf-tərəfə toplasaydıq.uyğun olaraq

$$\Delta \cdot y = \Delta_y \qquad (7)$$

və

$$\Delta \cdot z = \Delta_z \qquad (8)$$

bərabərliklərini almış olardıq.

Beləliklə (1) sistemini, onunla eynigüclü olan

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases} \qquad (9)$$

sisteminə gətirmək olar. (1) sistemininin hərbir həlli (9) sisteminin, (9) sisteminin hər bir həlli isə (1) sistemininin həllidir.

(9) sistemindən göründüyü kimi, (1) sisteminin əsas determinantı $\Delta \neq 0$ isə, onda (9) sisteminin, deməli eləcə də (1) sisteminin

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}, \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}, \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases} \qquad (10)$$

düsturları ilə təyin olunan yeganə həlli var. (10) düsturları xətti cəbri (1) tənliklər sisteminin həlli üçün **Kramer düsturları** adlanır.

(1) sisteminin əsas determinantı $\Delta = 0$ olduqda isə aşağıdakı hallar mümkündür:

a) (1) sisteminin (4) bərabərlikləri ilə təyin olunan köməkçi determinantlarının hamısı sıfıra bərabərdir $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Bu halda (9) tənlikləri, eləcə də (1) sistemi x, y və z məchullarının çoxlu sayda qiymətlərində ödənilə bilərlər, yəni (1) sisteminin sonsuz sayda həlli ola bilər , daha dəqiq, sistemin bir həlli varsa, onda onun sonsuz sayda həlli var;

b) (1) sisteminin (4) bərabərlikləri ilə təyin olunan köməkçi determinantlarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 \neq 0$. Bu halda (9) tənliklərindən biri x, y və z məchullarının heç bir qiymətində ödənməyəcək, deməli (9) sisteminin və eləcə də (1) sisteminin bu halda həlli yoxdur.

Xətti cəbri tənliklər sisteminin matris üsulu ilə həlli.

Fərz edək ki, üçməchullu üç xətti

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{1}$$

cəbri tənliklər sistemi verilmişdir.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

İşarə etsək, (1) sistemini matis formasında

$$AX = D \tag{3}$$

Şəklində yazmaq olar.verilmiş A matrisi cırlaşmayan matrisdirsə, yəni $\Delta = \det A \neq 0$ isə onda onun A^{-1} tərsi var və (3) bərabərliyinin hər tərəfini soldan A^{-1} tərs matrisinə vurmaqla

$$A^{-1}AX = A^{-1}D,$$

$A^{-1}A = E$ bərabərliyini nəzərə aldıqda isə üçməchullu (1) xətti cəbri tənliklər sisteminin

$$EX = A^{-1}D$$

yaxud

$$X = A^{-1}D \tag{4}$$

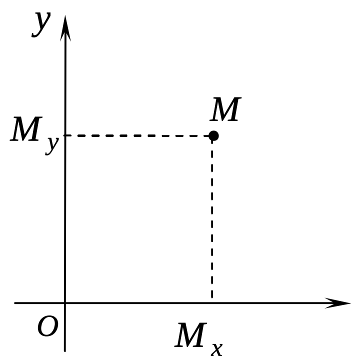
şəklində həllini tapmış oluruq. (1) xətti cəbri tənliklər sisteminin (4) şəklində həlli sistemin matris üsulu ilə həlli adlanır.

Müstəvi üzərində analitik həndəsə

Analitik həndəsə – riyyaziyyatın bir bölməsi olub, həndəsi obrazları cəbri üsullarla öyrənən hissəsidir. Bu bölmə, XVII əsrdə görkəmli fransız riyaziyyatçısı Rene Dekart düzbucaqlı koordinat sistemini yaratdıqdan sonra meydana gəlmişdir.

Müstəvi üzərində düzbucaqlı və polyar koordinat sistemləri. Nöqtənin düzbucaqlı və polyar koordinatları arasında əlaqə düsturları.

Ortaq kəsişmə nöqtəsi olan və üzərində parça uzunluğu ölçmək üçün miqyas təyin olunmuş. qarşılıqlı perpendikulyar istiqamətlənmiş iki düz xətt (yəni iki ədəd oxu) düzbucaqlı koordinat sistemi əmələ gətirir. Ox-absis, Oy- isə ordinat oxu adlanır. Bu oxların kəsişmə nöqtəsi olan O nöqtəsi koordinat başlanğıcı, bu oxların yerəşdiyi Oxy müstəvisi isə koordinat müstəvisi adlanır. Şəkildən göründüyü kimi koordinat oxları koordinat müstəvisini rüblər adlanan dörd hissəyə ayırır.



Şəkil 1

Müstəvi üzərində bir M nöqtəsi götürək və bu nöqtədən koordinat oxlarına perpendikulyar düz xətlər çəkək. Bu düz xətlərin Ox və Oy oxları ilə kəsişmə nöqtələrini,uyğun olaraq, M_x və M_y ilə işarə edək. Ox oxu üzərində yerləşən M_x nöqtəsinə bu oxda bir həqiqi x ədədi, Oy oxu üzərində yerləşən M_y nöqtəsinə bu oxda bir həqiqi y ədədiuyğun gəlir. M nöqtəsinə qarşı birinci x, ikinci y ədədi olmaqla nizamlanmış $(x;y)$ ədədlər cütünu qarşı qoyaq. Hər bir M nöqtəsi ilə M_x və M_y nöqələri yeganə təyin olunduqlarından, bu M nöqtəsinə qarşı qoyulan nizamlanmış $(x;y)$ ədədlər cütü də yeganə olacaq. İndi isə $(x;y)$ ədədlər cütü verildikdə M noqtəsini quraq. Cütdə birinci duran x ədədini Ox oxunda M_x, cütdə ikinci duran y ədədini Oy oxunda M_y nöqtəsi şəklində təsvir edək və bu nöqtələrdən koordinat oxlarına paralel düz xəttlər keçirək. Bu düz xəttlər yeganə bir nöqtədə kəsişəcək ki. bu kəsişmə nöqtəsini M ilə işarə edib verilmiş $(x;y)$ ədədlər cütünə qarşı qoyaq. Bu qayda ilə verilmiş hər bir $(x;y)$

həqiqi ədədlər cütünə qarşı da müstəvi üzərində yeganə M nöqtəsi qarşı qoymaq olar. Beləliklə,düzbucaqlı koordinat sistemi vasitəsi ilə müstəvi üzərindəki M nöqtələri ilə $(x;y)$ həqiqi ədədlər cütü arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaranır ki, bu $(x;y)$ həqiqi ədədlər cütü müstəvi üzərində verilmiş M nöqtəsinin düzbucaqlı koordinatları adlanır.

x-ədədi verilmiş M nöqtəsinin absisi, y ədədi isə M nöqtəsinin ordinatı adlanır.

Koordinat oxları koordinat müstəvisini rüblər adlanan dörd hissəyə ayırır ki, rüblər üzrə nöqtələrin koordinatlarının işarəsi :

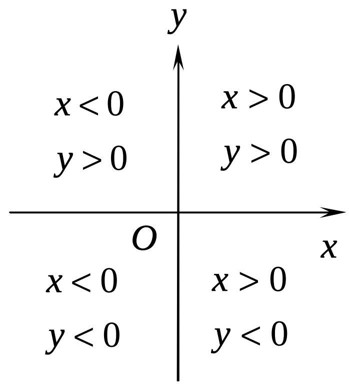
I rübdə $x>0$, $y>0$;

II rübdə $x<0$, $y>0$;

III rübdə $x<0$, $y<0$;

IV rübdə $x>0$, $y<0$

olacaq.

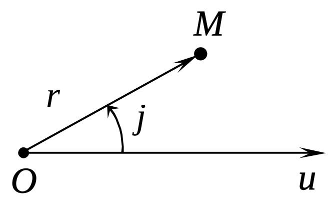


Şəkil 2

Polyar koordinat sistemi

Polyus adlanan nöqtədən çıxan və üzərində parça uzunluğu ölçmək üçün miqyas təyin edilmiş şüa müstəvi üzrə polyar koordinat sistemi əmələ gətirir. O polyus nöqtəsi, Ou- oxu isə polyar ox adlanır.

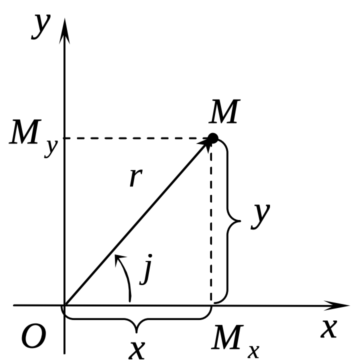
Müstəvi üzərində M nöqtəsi götürək. O polyus nöqtəsi ilə M nöqtəsini düz xətt parçası vasitəsi ilə birləşdirərək istsqamətlənmiş $\overline{OM}$ parçasını almış oluruq. istiqamətlənmiş $\overline{OM}$ parçasının uzunluğunu r ilə, onun polyar oxun müsbət istiqaməti ilə saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində əmələ gətirdiyi bucağı j ilə işarə edək və verilmiş M nöqtəsinə nöqtəsinə qarşı birinci r , ikinci j ədədi olmaqla $(r;j)$ ədələr cütünü qarşı qoyaq. Polyar koordinat sistemi vasitəsi ilə müstəvi üzərində verilmiş nöqtəyə yeganə qayda ilə $(r;j)$ ədələr cütü qarşı qoymaq olar. Aydındır ki, $r \geq 0$ və $0 \leq j < 2p$ qiymətləri almalıdır. İndi isə $r \geq 0$ və $0 \leq j < 2p$ qiymətləri alan $(r;j)$



Şəkil 3

ədədlər cütü vasitəsi ilə müstəvi üzərində M nöqtəsini quraq. Polyus nöqtəsindən polyar oxun müsbət istiqaməti ilə saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində j bucağı əmələ gətirən şüa keçirək, bu şüanın üzərində olan və polyusdan məsafəsi r olan yeganə nöqtə var ki, bu nöqtəni M ilə işarə edib verilmiş $(r;j)$ ədədlər cütünə qarşı qoyaq. Beləliklə, polyar koordinat sistemi vasitəsilə verilmiş $(r;j)$ ədədlər cütünə qarşı müstəvi üzərində yeganə M nöqtəsi qarşı qoymaq olar. Deməli, polyar koordinat sistemi müstəvi üzərində M noqtəsi ilə nizamlanmış $(r;j)$ ədədlər cütü arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır. Nizamlanmış bu $(r;j)$ ədədlər cütü müstəvi üzərində verilmiş M nöqtəsinin polyar koordinatları adlanır.

İndi isə müstəvi üzərində verilmiş nöqtənin düzbucaqlı koordinatı ilə polyar koordinatı arasında əlaqə düsturlarını öyrənək. Bunun üçün müstəvi üzərində Oxy düzbucaqlı koordinat sistemi götürək və polyar sistemini bu düzbucaqlı koordinat sistemində elə yerləşdirək ki, polyus nöqtəsi koordinat başlanğıcı ilə, polyar ox isə Ox ilə üst-üstə düşsün.müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinatları $(x;y)$, polyar koordinatları isə $(r;j)$ olan eyni bir M nöqtəsi götürək və bu koordinatlar arasında əlaqəni araşdıraq. Düzbucaqlı OPM üçbucağından



Şəkil 4

$$\begin{cases} \cos j = \dfrac{\overline{OP}}{\left|\overline{OM}\right|} = \dfrac{x}{r}; \\ \sin j = \dfrac{\overline{PM}}{\left|\overline{OM}\right|} = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

alırıq ki, buradan da

$$\begin{cases} x = r\cos j\,; \\ y = r\sin j \end{cases} \tag{1}$$

bərabərlikləri alınır. (1) bərabərlikləri nöqtənin düzbucaqlı koordinatlarının polyar koordinatları ilə ifadəsi düsturları adlanır. Pifaqor teoreminə əsasən, düzbucaqlı OPM üçbucağında hipotenuzun kvadratı katetlərin kvadratları cəminə bərabar olduğundan, $\left|\overline{OM}\right|^2 = \left|\overline{OP}\right|^2 + \left|\overline{PM}\right|^2$ bərabərliyini,

$\left|\overline{OM}\right| = r, \left|\overline{OP}\right| = x, \left|\overline{PM}\right| = y$ qiymətlərini nəzərə aldıqda isə $r^2 = x^2 + y^2$, yaxud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bərabərliyini alırıq.

Düzbucaqlı üçbucaqda iti bucaq qarşısındakı katetin bitişik katetə nisbəti həmin iti bucağın tangensinə bərabər olduğundan, $tgj = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{y}{x}$, buradan isə $j = arctg\frac{y}{x}$ bərabərliyini alırıq. Beləliklə

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ j = arctg\frac{y}{x} \end{cases} \qquad (2)$$

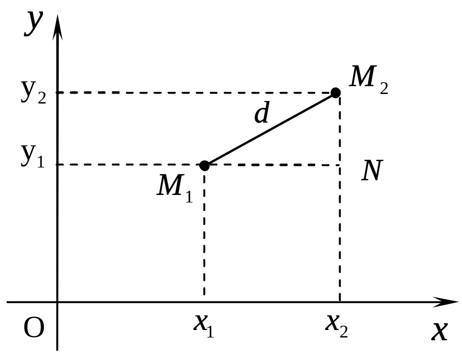
Bərabərliklərini almış oluruq ki, bu bərabərliklər də nöqtənin polyar koordinatlarının düzbucaqlı koordinatları ilə ifadə düsturları adlanır.

Analitik həndəsənin ən sadə məsələləri

Müstəvi üzərində verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafə düsturu,üçbucağın sahəsi düsturu, parçanın verilmiş nisbətdə bölünməsi- analitik həndəsənin ən sadə məsələləri adlanırlar.

Müstəvi üzərində verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafə düsturu

Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinatları, uyğun olaraq $(x_1; y_1)$ və $(x_2; y_2)$ olan M_1 və M_2 nöqtələri götürək və M_1 və M_2 nöqtələri arasında məsafə düsturunu cıxaraq. İki nöqtə arasındakı məsafə bu nöqtələri birləşdirən düz xətt parçasının uzunluğu olduğundan, axtarılan məsafə $d = |M_1M_2|$ olacaq. Pifaqor teoreminə əsasən, düzbucaqlı M_1M_2N üçbucağında hipotenuzun kvadratı katetlərin kvadratları cəminə bə-



Şəkil 5

rabər oduğundan,

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

buradan isə axtarılan məsafə üçün

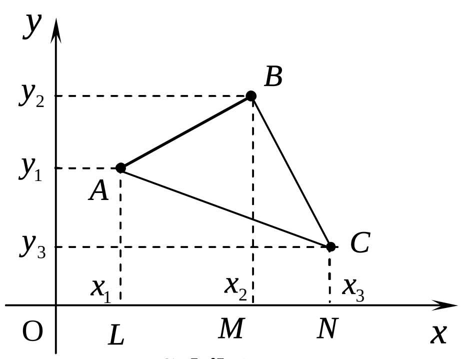
$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

düsturunu alırıq.

(1) düsturu müstəvi üzərində verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafə düsturu adlanır.

Üçbucağın sahəsi düsturu

Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinatları uyğun olaraq $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ olan və bir düz xətt üzərində yerləşməyən A, B, C noqtələri götürək: $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$. Hələ elementar həndəsə kursundan məlumdur ki, müstəvi üzərində bir düz xətt üzərində yerləşməyən üç nöqtə üçbucaq əmələ gətirir. Bu üçbucağın sahəsi düsturunu çıxaraq.



Şəkil 6

A, B və C nöqtələrindən Ox oxuna perpendi-kul-yarlar endirək və bu perpendkulyarların Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrini, uyğun olaraq L, M və N ilə işarə etsək $LABM$, $MBCN$ və $LACN$ trapesiyalarını almış olarıq. Trapesiyanın sahəsi oturacaqları cəminin yarısı ilə hündürlüyünün hasilinə bərabər olduğundan, təpələri bir düz xətt üzərində olmayan üç A, B və C nöqtə ləri-nin əmələ gətirdiyi üçbucağın sahəsi üçün

$$S_{\Delta ABC} = S_{LABM} + S_{MBCN} - S_{LACN} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) - - \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) =$$

$$= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)|,$$

yaxud

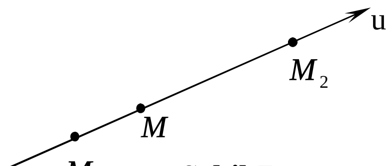
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right| \qquad (2)$$

bərabərliyini alırıq ki, burada daxildəki xətlər determinant işarəsini, xaricdəki xətlər isə mütləq qiymət işarəsini bildirir.

(2) düsturu üçbucağın səhəsi düsturu adlanır.

Parçanın verilmiş nisbətdə bölünməsi

Fərz edək ki, müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinatları, uyğun olaraq $(x_1;y_1)$ və $(x_2;y_2)$ olan M_1 və M_2 nöqtələri verilib, M_1 və M_2 nöqtələrindən keçən düz xətt çəkək. Müsbət istiqamət olaraq M_1-dən M_2-yə olan istiqaməti götürək. Beləliklə bir u oxu almış oluruq. Bu ox üzərində M2 nöqtəsindən fərqli olan hər hansı M nöqtəsi götürək. $l=\dfrac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$ nisbəti M nöqtəsinin $\overline{M_1M_2}$ parçasını böldüyü nisbət adlanır ($\overline{M_1M}$ və $\overline{MM_2}$) uyğun olaraq bu parçaların qiymələridir).

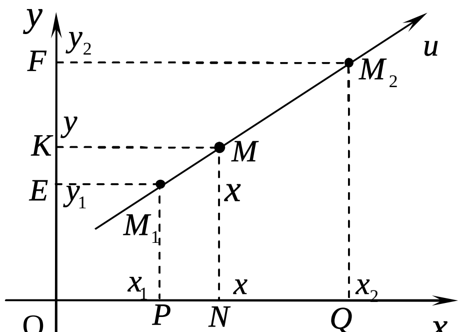


Şəkil 7

İndi isə parçanı verilmiş l nisbətində bölən nöqtənin koordinatlarını tapaq. Bu koordinatlar aşağıdakı teorem vasitəsi ifadə edilir.

Teorem. $M(x;y)$ nöqtəsi $\overline{M_1M_2}$ parçasını verilmiş $l=\dfrac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$ nisbətində bölürsə, onun koordinatları

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+lx_2}{1+l}; \\ y=\dfrac{y_1+ly_2}{1+l} \end{cases} \qquad (1)$$



Şəkil 8

düsturları ilə ifadə olunur; burada $(x_1;y_1)$ və $(x_2;y_2)$ uyğun olaraq, verilmiş M_1 və M_2 nöqtələrinin koordinatlarıdırlar.

İsbatı. M_1, M **və** M_2 nöqtələrindən Ox və Oy koordinat oxlarına perpendikulyarlar endirək və onların bu oxlarla kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq, P,N,Q və E,K,F ilə işarə edək. Fales teoreminə əsasən, parallel düz xətlər iki düz xətt üzərində mütənasib parçalar ayırdığından,

$$l=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=\frac{\overline{PN}}{\overline{NQ}}=\frac{\overline{EK}}{\overline{KF}},$$

$\overline{PN} = x - x_1, \overline{NQ} = x_2 - x$ və $\overline{EK} = y - y_1, \overline{KF} = y_2 - y$ qiymətlərini nəzərə aldıqda isə

$$l = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

bərabərliklərini alırıq ki, onun da hər tərəfini $x_2 - x$ ifadəsinə vurub x dəyişəninə nəzərən həll etsək,

$$lx_2 - lx = x - x_1 \text{ və ya } (1 + l)x = x_1 + lx_2$$

bərabərliyini, buradan isə isbatı tələb olunan

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}$$

bərabərliyini, $y_2 - y$ ifadəsinə vurub y dəyişəninə nəzərən həll etsək,

$$ly_2 - ly = y - y_1 \text{ , və ya } (1 + l)y = y_1 + ly_2$$

bərabərliyini, buradan isə isbatı tələb olunan

$$y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}$$

bərabərliyini almış olarıq.

Xüsusi halda, M nöqtəsi $\overline{M_1M_2}$ parçasının orta noqtəsidirsə, onda $\overline{M_1M}$ və $\overline{MM_2}$ parçalarının qiymətləri bərabər olduğundan, M nöqtəsi $\overline{M_1M_2}$ parçasını $l = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = 1$ nisbətində böləcək. $l = 1$ qiymətini (1) düsturlarında nəzərə aldıqda isə parçanın orta nöqtəsinin koordinatları üçün

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}; \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \tag{2}$$

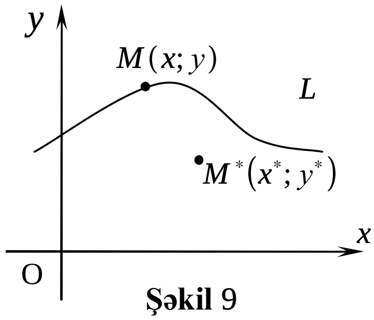
düsturlarınu alarıq, yəni ***parçanın orta nöqtəsinin koordinatları uc nöqtələrinin uyğun koordinatlarının ədədi ortasına bərabərdir***.

Müstəvidə xətt tənlikləri

Tutaq ki, iki x və y dəyişənindən asılı hər hansı

$$F(x; y) = 0 \tag{1}$$

münasibəti verilib. Əgər (1) münasibəti x və y dəyişənlərinin bütün mümkün qiymətlərində ödənirsə, bu münasibət ***eynilik***, heç də bütün mümkün qiymətlərində ödənmirsə ***tənlik*** adlanır. Məsələn $(x+y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$ münasibəti x və y dəyişənlərinin bütün mümkün qiymətlərində ödəndiyindən eynilik, $x^2 + y^2 - 4xy = 0$ münasibəti isə x və y dəyişənlərinin bütün mümkün qiymətlərində ödənmədiyindən tənlikdir.



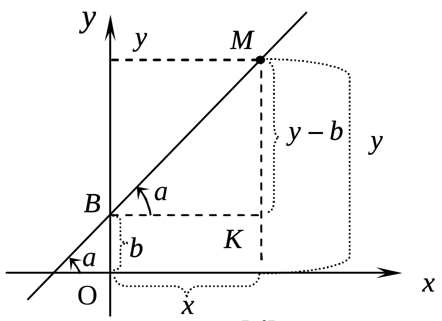
Şəkil 9

Fərz edək ki, (1) tənliyi və müstəvi üzərində hər hansı bir L xətti verilib. Əgər L xətti üzərində olan istənilən $M(x;y)$ nöqtəsinin koordinatı (1) tənliyini ödəyirsə və L xətti üzərində olmayan istənilən $N(x^*;y^*)$ nöqtəsinin koordinatları isə (1) tənliyini ödəmirsə, onda (1) tənliyi L xəttinin tənliyi adlanır. Əgər L xəttinin tənliyi olan (1) tənliyininin sol tərəfində duran $F(x;y)$ ifadəsi x və y dəyişənlərinə nəzərən bir dərəcəli çoxhədli (ümumi şəkli $F(x;y) = Ax + By + C$) isə, L xətti 1-ci tərtib xətt, iki dərəcəli çoxhədli (ümumi şəkli $F(x;y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$) isə, L xətti 2-ci tərtib xətt adlanır.

İndi isə 1-ci tərtib xətlərlə tanış olaq.

Düz xəttin meyl bucağı, bucaq əmsalı.
Düz xəttin bucaq əmsallı tənliyinin çıxarılışı

Müstəvi üzərində Oxy düzbucaqlı koordinat sistemi götürək və hər hansı L düz xətti çəkək. Bu L düz xəttinin Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində əmələ gətirdiyi a bucağı bu düz xəttin Ox oxuna meyl bucağı adlanır. Meyl bucağının tangensi bu düz xəttin bucaq əmsalı adlanır, k ilə işarə edilir: $k = tga$. Şəkildən göründüyü kimi hər bir düz xəttin Ox oxuna meyl bucağı bir birindən 180° ilə fərqlənən iki bucaqdır. Tanqensin 180° dövrülüyünü nəzərə alsaq, digər meyl bucağının tangensinin də k-ya bərabər ol-



Şəkil

duğu alınar.

İndi isə bucaq əmsalı əvvəlcədən verilmiş k ədədinə bərabər olan ordinat oxundan b qiymətli parça ayıran düz xəttin tənliyini çıxaraq. Düz xəttin meyl bucağını a ilə işarə etsək, onda $k = tga$ olacaq. Verilmiş düz xətt üzərində cari koordinatları $(x; y)$ olan M nöqtəsi götürək və bu düz xəttin Oy ordinat oxunu kəsdiyi $B(0; b)$ nöqtəsindən absis oxuna paralel, M nöqtəsindən isə absis oxuna perpendikulyar düz xətt çəkək. Çəkilmiş bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsini N ilə işarə etsək, iki parallel düz xəttin üçüncü düz xətlə kəsişməsindən alınan uyğun bucaqlar bərabər olduğundan, $\angle BNM = a$ olacaq.

Düzbucaqlı BNM üçbucağında iti bucaq qarşısında duran katetin bitişik katetə nisbəti bu iti bucağın tangensinə bərabər olduğundan

$$k = tga = tg\angle BNM = \frac{\overline{NM}}{\overline{BN}}$$

alırıq. $\overline{NM} = y - b$, $\overline{BN} = x - 0 = x$ qiymətlərini sonuncu münasibətdə nəzərə alsaq,

$$k = \frac{y-b}{x} \quad \text{yaxud} \quad y - b = kx\ ,$$

buradan isə

$$y = kx + b \tag{1}$$

tənliyini alarıq. (1) tənliyi bucaq əmsalı əvvəlcədən verilmiş k ədədinə bərabər olan, ordinat oxundan isə b qiymətli parça ayıran düz xəttin tənliyi adlanır.

Xüsusi halda, $b = 0$ olduqda,

$$y = kx \tag{2}$$

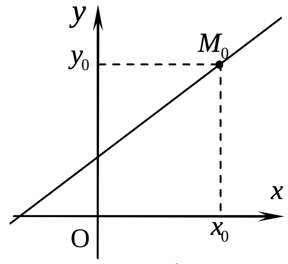
düz xətti ordinat oxundan heç bir qiymətli parça ayırmayaraq koordinat başlanğıcından keçir.

Müstəvi üzərində verilmiş nöqtədən verilmiş istiqamətdə keçən düz xətt tənliyi

İndi isə müstəvi üzərində $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı əvvəlcədən verilmiş k ədədinə bərabər olan düz xəttin tənliyini çıxaraq. Aydındır ki, bu xəttin tənliyi bucaq əmsallı

$$y = kx + b \qquad (1)$$

tənliyi şəklində olmalıdır. Bu düz xətt M_0 nöqtəsindən keçdiyindən, yəni M_0 nöqtəsi bu düz xəttin üzərində yerləşdiyindən, onun $(x_0; y_0)$ koordinatları bu düz xəttin (1) tənliyini ödəməlidir



Şəkil 11

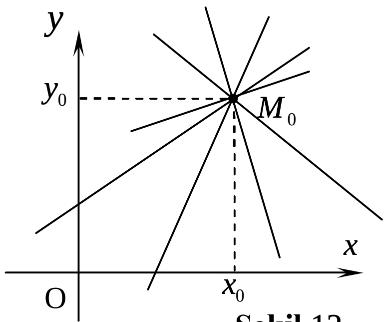
$$y_0 = kx_0 + b. \qquad (2)$$

(1) və (2) münasibətlərini tərəf tərəfə çıxsaq

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3)$$

Tənliyini alarıq ki, bu tənlik müstəvi üzərində $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı əvvəlcədən verilmiş k ədədinə bərabər olan düz xəttin tənliyi adlanır.

(3) tənliyində k ədədinə müxtəlif qiymətlər verməklə, müstəvi üzərində $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən bütün düz xətlərin tənliklərini almaq olar.Odur ki, (3) tənliyinə müstəvi üzərində $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən düz xətlər ailəsinin (yaxud dəstəsinin) tənliyi kimi də baxmaq olar.



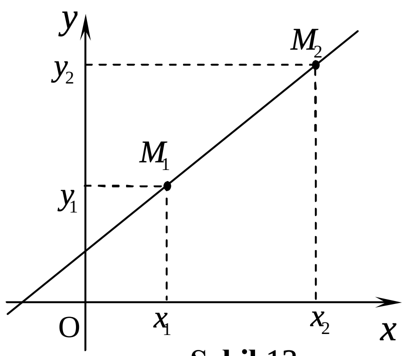
Şəkil 12

Müstəvi üzərində verilmiş iki nöqtədən keçən düz xətt tənliyi

Tutaq ki, müstəvi üzərində koordinat oxlarına parallel düz xətlər üzərində yerləşməyən, yəni koordinatları $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ şərtlərini ödəyən $M_1(x_1; y_1)$ və $M_2(x_2; y_2)$ nöqtələri verilib. Hələ elementar həndəsə kursundan məlumdur ki, müstəvi üzərində bu iki nöqtədən yalnız və yalnız bir düz xətt keçirmək olar. Bu düz xəttin tənliyini çıxaraq. Düz xətt M_1 nöqtəsindən keçdiyindən, onun tənliyi

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4)$$

şəklində olmalıdır. Digər tərəfdən M_2 nöqtəsi də bu



Şəkil 13

düz xətt üzərində yerləşdiyindən onun da koordinatları (4) tənliyini ödəməlidir

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Buradan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

tapıb, k-nn tapılmış bu qiymətini (4) tənliyində nəzərə alsaq,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

onu $y_2 - y_1 \neq 0$ ədədinə bölməklə isəaxtarılan düz xəttin simmetrik

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

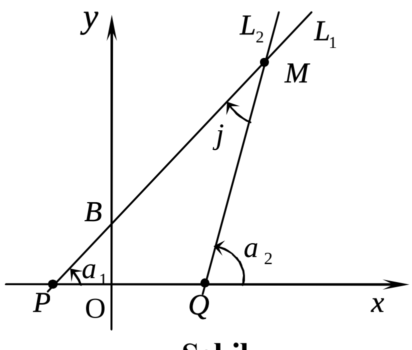
şəklində tənliyini almış oluruq. (5) tənliyi müstəvi üzərində verilmiş iki $M_1(x_1; y_1)$ və $M_2(x_2; y_2)$ nöqtəsindən keçən düz xətt tənliyi adlanır.

İki düz xətt arasında qalan bucaq. İki düz xəttin parallellik və perpendikulyarlıq şərtləri.

Ox oxuna meyl bucaqları, uyğun olaraq a_1 və a_2 olan L_1 və L_2 düz xətləri götürək və bu iki düz xətt arasında qalan j bucağını tapaq. Bu düz xətlərin bucaq əmsalları $k_1 = tga_1$ və $k_2 = tga_2$ olduğundan, onların tənlikləri, uyğun olaraq

$$y = k_1 x + b_1 \quad (1)$$

$$y = k_1 x + b_1 \quad (2)$$

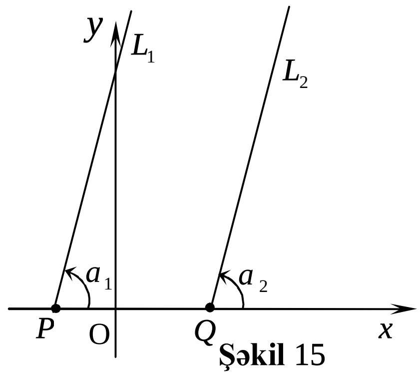


Şəkil 14

şəklində olacaq.

Əgər bu düz xətlər paralel deyilsə, yəni onların meyl bucaqları fərqlidirsə($a_1 \neq a_2$),müstəvi üzərində paralel olmayan iki düz xətt bir nöqtədə kəsişəcək və bu kəsişmə nöqtəsini M ilə işarə edək. Bu düz xəttlərin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsini, uyğun olaraq P və Q ilə işarə etsək $\angle MPQ = a_1, \angle MQN = a_2$ olduğundan, bu iki düz xətt arasında qalan bucağı $\angle PMQ = j$ ilə işarə etsək, üçbucağın xarici bucağı, özü ilə qonşu olmayan iki daxili bucağın cəminə bərabər olduğundan, $\angle MQN = \angle MPQ + \angle PMQ$,yəni $a_2 = a_1 + j$, buradan isə verilmiş iki düz xətt arasında qalan bucaq üçün $j = a_2 - a_1$ münasibətini, onun tangensi üçün isə

$$tg j = tg(a_2 - a_1) = \frac{tga_2 - tga_1}{1 + tga_2 \cdot tga_1} ,$$



Şəkil 15

münasibətini alırıq. $k_1 = tga_1$ və $k_2 = tga_2$ qiymətlərini nəzərə alsaq, sonuncu bərabərlikdən, tənlikləri uyğun olaraq (1) və (2) şəklində verilmiş iki L_1 və L_2 düz xətləri arasında qalan j bucağının tangensi üçün

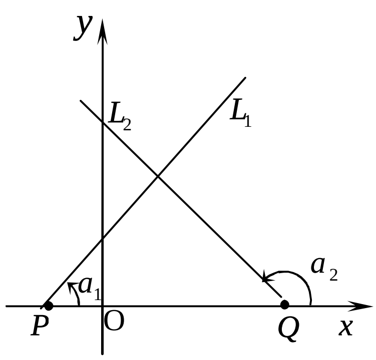
$$tg j = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (3)$$

düsturunu alırıq.

L_1 və L_2 düz xətləri parallel isə, onda onların Ox oxuna meyl bucaqları bərabərdirlər; $a_1 = a_2$ .Buradan $tga_1 = tga_2$, $k_1 = tga_1$ və $k_2 = tga_2$ qiymətlərini nəzərə aldıqda isə

$$k_1 = k_2 \qquad (4)$$

münasibəti alınır.(4) şərti, tənlikləri uyğun olaraq (1) və (2) şəklində verilmiş iki L_1 və L_2 düz xəttlərinin ***paralellik şərti*** adlanır.



Şəkil 16

L_1 və L_2 düz xətləri perpendikulyar isə, ond onların arasında qalan bucaq $j = \frac{p}{2}$ olacaq, bu halda

$$a_2 = a_1 + \frac{p}{2},\ tga_2 = tg\left(a_1 + \frac{p}{2}\right) = -ctga_1 = -\frac{1}{tga_1}$$

alırıq. $k_1 = tga_1$ və $k_2 = tga_2$ qiymətlərini nəzərə aldıqda isə sonuncu bərabərlikdən

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (5)$$

şərti alınır.

(5) şərti tənlikləri uyğun olaraq (1) və (2) şəklində verilmiş iki L_1 və L_2 düz

xətlərinin ***perpendikulyarlıq şərti*** adlanır.

Düz xəttlərin paralellik və perpendikulyarlıq şərtindən göründüyü kimi, müstəvi üzərində iki düz xəttin ***parallel olması üçün onların bucaq əmsalları bərabər, perpendikulyar olması üçün isə onların bucaq əmsalları işarəcə əks, qiymətcə tərs olmalıdır***.

Düz xəttin ümumi tənliyi, düz xəttin natamam tənlikləri

A və B əmsallarının hər ikisinin eyni zamanda sıfra bərabər olmadığı ($A^2 + B^2 \neq 0$) tədqirdə x və y dəyişənlərinə nəzərən xətti olan

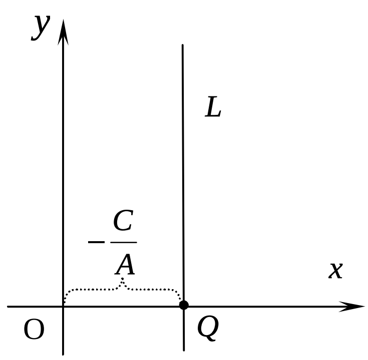
$$Ax + By + C = 0,\ (A^2 + B^2 \neq 0) \tag{6}$$

tənliyi müstəvi üzərində bir düz xətt təyin edir

Doğrudan da, $B \neq 0$ qiymətlərində (6) tənliyini

$$By = -Ax - C, \text{ və ya } y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

şəklində yazmaq olar ki, $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ işarə etməklə, onu $y = kx + b$ şəklində yazmaq olar. Bu isə müstəvi üzərində düz xəttin bucaq əmsallı tənliyidir.Deməli, bu halda (6) tənliyi müstəvi üzərində bir düz xətt müəyyən edir.



Şəkil 17

$B = 0$ qiymətində isə (qeyd edək ki,bu halda $A \neq 0$ olmalıdır), (6) münasibəti $Ax + C = 0$ şəklinə düşür. $A \neq 0$ olduğundan onu $x = -\frac{C}{A}$ şəklində də yazmaq olar. Bu isə onu göstərir ki, bu düz xəttin üzərində olan bütün nöqtələrin absisləri eyni olub, $-\frac{C}{A}$ ədədinə bərabərdir. Yəni $Ax + C = 0$ tənliyi ordinat oxuna parallel olub, absis oxundan $-\frac{C}{A}$ qiymətli parça ayıran düz xəttin tənliyidir.

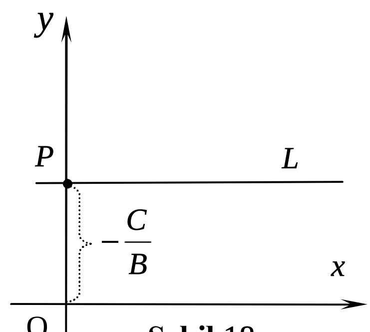
Beləliklə hər iki halda, həm $B \neq 0$ qiymətlərində, həm də $B = 0$ qiymətində (6) tənliyinin müstəvi üzərində bir düz xətt təyin etdiyini göstərdik. (6) tənliyi müstəvi üzərində düz xəttin **ümumi tənliyi** adlanır.

Əgər (1) tənliyində A, B və C əmsallarından heç olmazsa biri sıfra bərabərdirsə, onda bu tənlik **düz xəttin natamam tənlikləri** adlanır. A, B və C əmsallarından heç olmazsa birinin sıfra bərabər olması aşağıdakı hallara gətirir.

1) $A=0$ (bu halda $B\neq 0$) olduqda düz xəttin ümumi (6) tənliyi

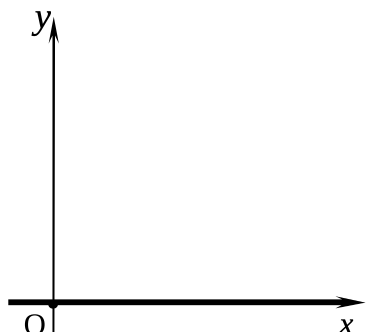
$$By+C=0, \text{ və ya } y=-\frac{C}{B}$$

şəklinə düşür ki, bu da düz xətt üzərində yerləşən bütün nöqtələrin ordinatlarının eyni olub, $-\frac{C}{B}$ ədədinə bərabər olduğunu göstərir. Yəni bu tənlik Ox absis oxuna paralel, Oy ordinat oxundan isə $-\frac{C}{B}$ qiymətli parça ayıran düz xəttin tənliyidir.



Şəkil 18

Xüsusi halda, $C=0$ olduqda onda $y=0$ alırıq ki, bu tənlik Ox absis oxuna paralel, Oy ordinat oxundan isə 0 qiymətli parça ayıran düz xəttin, yəni absis oxunun tənliyidir.

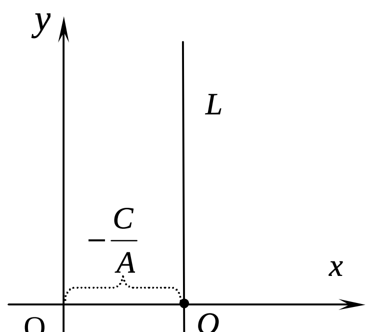


Şəkil 19

2) $B=0$ (bu halda $A\neq 0$) olduqda düz xəttin ümumi (6) tənliyi

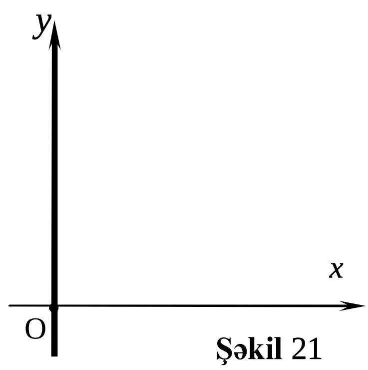
$$Ax+C=0, \text{ və ya } x=-\frac{C}{A}$$

şəklinə düşür ki, bu da düz xətt üzərində yerləşən bütün nöqtələrin absislərinin eyni olub, $-\frac{C}{A}$ ədədinə bərabər olduğunu göstərir. Yəni bu tənlik Oy ordinat oxuna paralel, Ox absis oxundan isə $-\frac{C}{A}$ qiymətli parça ayıran düz xəttin tənliyidir.

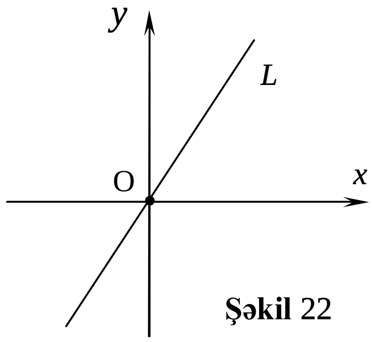


Şəkil 20

Xüsusi halda, $C=0$ olduqda onda $x=0$ alırıq ki, bu bu tənlik Oy ordinat oxuna paralel, Ox absis oxundan isə 0 qiymətli parça ayıran düz xəttin, yəni ordinat oxunun tənliyidir.



Şəkil 21



Şəkil 22

3) $C=0, A\neq 0, B\neq 0$ olduqda isə (6) tənliyi $Ax+By=0$ şəklinə düşür ki, koordinat başlanğıcı $O(0;0)$ nöqtəsinin koordinatı bu tənliyi ödədiyindən, bu düz xətt koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyidir.

Deməli, düz xəttin natamam tənlikləri ya absis oxuna parallel, ya ordinat oxuna parallel, ya da koordinat başlanğıcından keçən düz xətlərin tənliklərini ifadə edir.

Qeyd edək ki, verilmiş L_1 və L_2 düz xətlərinin tənlikləri bucaq əmsallı $y=k_1x+b_1$ və $y=k_2x+b_2$ şəklində deyil, uyğun olaraq, ümumi

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \;(B_1\neq 0) \tag{7}$$

və

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \;(B_2\neq 0) \tag{8}$$

şəklində verildikdə, onları uyğun olaraq,

$$y=-\frac{A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1} \text{ və } y=-\frac{A_2}{B_2}x-\frac{C_2}{B_2}$$

şəklində yazıb $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$ və $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$ işarə etməklə, L_1 və L_2 düz xətlərinin parallelliyi üçün $k_1=k_2$ şərtini $-\frac{A_1}{B_2}=-\frac{A_2}{B_2}$, yaxud

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \tag{9}$$

şəkildə, perpendikulyarlığı üçün $k_2=-\frac{1}{k_1}$ şərtini isə $-\frac{A_2}{B_2}=-\frac{B_1}{A_1}$, yaxud da

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \tag{10}$$

şəkildə yazmaq olar.

Düz xəttin «parçalarla» tənliyi

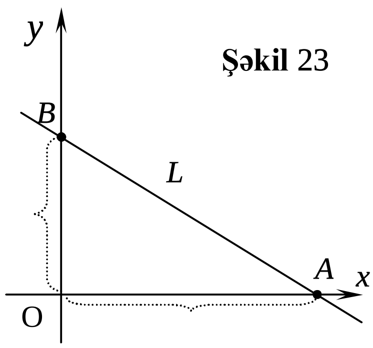
Absis oxundan qiyməti a, ordinat oxundan isə qiyməti b olan parça ayıran düz xəttin tənliyini çıxaraq. Bu düz xətt $A(a;0)$ və $B(0;b)$ nöqtəsindən keçdiyindən, müstəvi üzərində verilmiş iki nöqtədən keçən keçən düz xətt tənliyinə əsasən

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a} \text{ və ya } \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}$$

buradan isə $\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$, yaxud

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (11)$$

tənliyini almış oluruq.



Şəkil 23

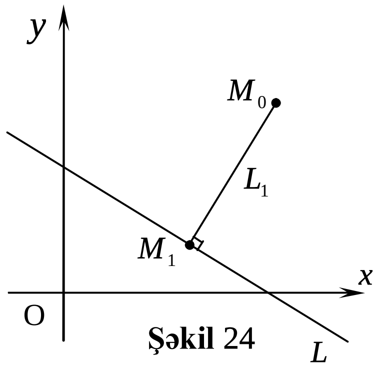
(11) tənliyi düz xəttin «parçalarla» tənliyi adlanır ; bu tənlikdəki a və b kəmiyyətləri, uyğun olaraq bu düz xəttin absis və ordinat oxlarından ayırdığı parçaların qiymətidir. Düz xəttin bu tənliyindən, əsasən düz xətti koordinat sistemində qurarkən istifadə edilir.

Tutaq ki, L düz xəttin tənliyi ümumi $Ax+By+C=0$ şəklində verilib və A, B və C əmsallarının hər üçü sıfırdan fərqlidir. Onda bu tənliyi əvvəl $Ax+By=-C$, sonra $\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$ daha sonra isə

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

şəklində yazıb, $a=-\frac{C}{A}$ və $b=-\frac{C}{B}$ işarə etməklə onu «parçalarla» $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ tənliyi şəklinə gətirmək olar.

Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə



Şəkil 24

Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə, bu nöqtədən düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğuna deyilir.

Tutaq ki, müstəvi üzərində koordinatları $(x_0; y_0)$ olan M_0 nöqtəsi və tənliyi ümumi

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0) \quad (6)$$

şəklində olan L düz xətti verilmişdir. $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsindən L düz xəttinə olan məsafə düsturunu tapaq. $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsindən keçən və L düz xəttinə perpendikulyar L_1 olan düz xəttin tənliyi

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0 \tag{12}$$

şəklində oluğundan, L və L_1 düz xətlərinin M_1 kəsişmə nöqtəsinin $(x_1;y_1)$ koordinatları bu düz xətlərin (6) və (12) tənliklərinin əmələ gətirdikləri

$$\begin{cases} Ax + By = -C; \\ Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0 \end{cases} \tag{13}$$

sisteminin həlli kimi tapıb, müstəvi üzərində verilmiş iki M_0 və M_1 nöqtələri arasındakı məsafə düsturundan

$$d(M_0;M_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

istifadə etsək, $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsindən L düz xəttinə olan axtarılan məsafə üçün

$$d = |M_0;M_1| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{14}$$

düsturunu alarıq. (14) düsturu müstəvi üzərində ***verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə qədər olan məsafə düsturu*** adlanır

İkinci tərtib xəttlər

Əvvəlki mövzularda qeyd etmişdik ki, müstəvi üzərindəki L xəttinin

$$\mathsf{F}(x;y) = 0$$

Tənliyinin sol tərəfindəki $\mathsf{F}(x;y)$ ifadəsi x və y dəyişənlərinə nəzərən iki dərəcəli çoxhədli isə, onda L xətti 2-ci tərtib xətt adlanır. x və y dəyişənləri-nə nəzərən iki dərəcəli çoxhədlinin ümumi şəkli

$$\mathsf{F}(x;y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

olduğundan,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

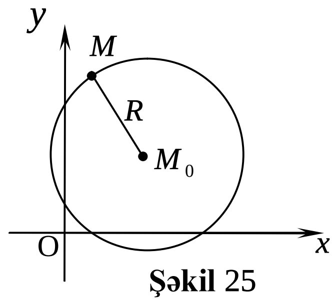
tənliyi 2-ci tərtib xətlərin ümumi tənliyi adlanır; qeyd etmək lazımdır ki, burada tənliyin dərəcəsini müəyyən edən A, B və C əmsallarının hər üçü eyni zamanda sıfıra bərabər ola bilməzlər ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), əks tədqirdə (1) tənliyi 1-ci dərəcəli, onun təyin etdiyi L xətti isə 1-ci tərtib xətt olardı.

Düz xətlər 1-ci tərtib xətlərlə əhatə olunduğundan, 2-ci tərtib xətləri, adətən ***2-ci tərtib əyrilər*** də adlandırırlar.

İndi isə 2-ci tərtib əyrilərin sadə hallarını nəzərdən keçirək.

Çevrə

Tərif 1. ***Müstəvi üzərində mərkəz adlanan nöqtədən bərabər uzaqlıqda yerləşən nöqtələrin həndəsi yeri (yəni, bu xassəni ödəyən bütün nöqtələr çoxluğu) çevrə adlanır.***



Şəkil 25

Çevrənin ixtiyari nöqtəsini onun mərkəzi ilə birləşdirən düz xətt parçası onun ***radiusu*** adlanır.

Mərkəzi $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində yerləşən və radiusu R ədədinə bərabər olan çevrənin tənliyini çıxaraq.

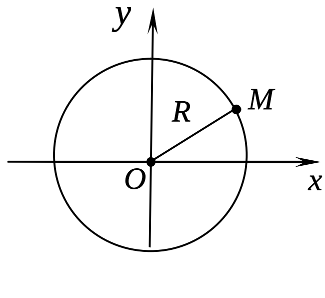
Çevrə üzərində cari koordinatları $(x;y)$ olan M nöqtəsi götürək və bu M nöqtəsini M_0 nöqtəsi ilə birləşdirək. $\overline{M_0M}$ parçası axtarılan çevrənin radiusu olduğundan, $\left|\overline{M_0M}\right| = R$ olacaq. Müstəvi üzərində iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən,

$$R = \left|\overline{M_0M}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

olacaq. Bu bərabərliyin hər tərəfini kvadrata yüksəltdikdə

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \qquad (2)$$

tənliyini alırıq. (2) tənliyi mərkəzi $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində yerləşən və radiusu R ədədinə bərabər olan ***çevrənin kanonik*** (yəni, ən sadə) ***tənliyi*** adlanır.



Şəkil 25

Xüsusi halda. çevrənin mərkəzi $O(0;0)$ koordinat başlanğıcında yerləşərsə, (2) tənliyi

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3)$$

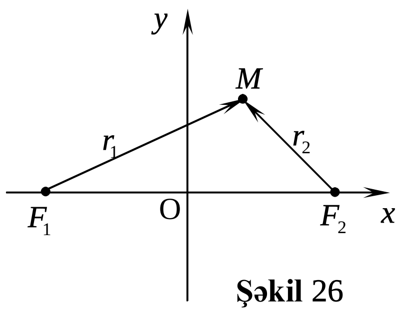
şəklinə düşür ki, bu da mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən və radiusu R-ə bərabər olan çevrənin kanonik tənliyi adlanır.

Ellips

Tərif 2. ***Müstəvi üzərində fokuslar adlanan iki nöqtədən məsafələrinin cəmi sabit kəmiyyət olub, fokuslar arasındakı məsafədən böyük qalan nöqtələrin həndəsi yeri (yəni, bütün belə nöqtələr çoxluğu) ellips adlanır.***

Müstəvi üzərində ixtiyari nöqtənin fokuslardan olan məsafələri, bu nöqtənin ***fokal radiusları*** adlanır.

İndi isə fokuslar arasındakı məsafəsi $2c$ ədədinə, fokusdan məsafələri cəmi isə $2a$ ədədinə (ellipsin tərifinə əsasən, $2a > 2c$, yəni $a > c$ olmalıdır) bərabər olan ellipsin tənliyini çıxaraq. Ümumiliyi pozmadan fokus nöqtələrini absis oxu üzərində elə yerləşdirək ki, ordinat oxu bu fokusları birləşdirən düz xətt parçasının ortasından keçsin, əks təqdirdə bu şərti koordinat oxlarının çevrilməsi vasitəsilə həyata keçirə bilərik.Ellipsin fokus nöqtələrini, uyğun olaraq, F_1 və F_2 ilə işarə etsək $|F_1F_2| = 2c$, O koordinat başlanğıcı $\overline{F_1F_2}$ orta nöqtəsi olduğundan isə $|F_1O| = |OF_2| = \frac{1}{2}|F_1F_2| = c$ alırıq. F_1 və F_2 nöqtələri O koordinat başlanğıcından müxtəlif tərəflərdə yerləşdiklərindən, onların koordinatları $F_1(-c;0)$ və $F_2(c;0)$ olacaq. Axtarılan ellipsin üzərində cari koordinatları $(x;y)$ olan ixtiyari M nöqtəsi götürək və bu nöqtənin fokal radiuslarını,yəni fokus nöqtələrindən məsafələrini uyğun olaraq, r_1 və r_2 ilə işarə edək : $r_1 = |F_1M|$ və $r_2 = |F_2M|$. İki nöqtə arasıdakı məsafə düsturuna əsasən,



Şəkil 26

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \;\; ; \;\; r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{4}$$

M nöqtəsi yalnız və yalnız o halda tənliyi axtarılan ellipsin üzərində olacaq ki,

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{5}$$

münasibəti ödənsin. (5) tənliyi axtarılan ellipsin tənliyidir.Onu koordinatlarla ifadə etmək üçün, (4) ifadələrini (5) münasibətində nəzərə alsaq

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{6}$$

münasibəti alınır. Bu tənlik də tələb olunan ellipsin tənliyidir. Lakin bu tənlik istifadə üçün bir qədər yararsızdır. Onu daha asan yadda saxlamaq üçün (6) tənliyini bir qədər çevirək. Bunun üçün (6) bərabərliyinin sol tərəfində duran köklərdən birini əks işarə ilə bərabərliyin digər tərəfinə keçirib, alınan münasibətin iki tərəfini kvadrata yüksəlsək

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

və ya

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

bərabərliyini, müxtəsər vurma düsturlarından istifadə edərək mötərizələri açıb oxşar hədləri islah etdikdən sonra isə

$$x^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2$$

və ya

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

bərabərliyini almış olarıq. Bu bərabərliyin hər tərəfini 4-ə bölüb onu

$$cx=a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \text{ və ya } a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

şəklidə, sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini bir daha kvadrata yüksəltdikdən sonra isə

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=\left(a^2-cx\right)^2,$$

şəklidə yazmaq olar. Müxtəsər vurma düsturlarından istifadə edərək mötərizələri açdıqdan sonra isə, sonuncu münasibətdən

$$a^2\left[x^2-2cx+c^2+y^2\right]=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

və ya

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

oxşar hədləri islah etdikdən sonra isə

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$

yaxud

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right) \quad (7)$$

münasibətini alırıq. Ellips üçün $2a>2c$, buradan isə $a>c$ olduğu yuxarıda qeyd olunduğundan, $a^2>c^2$ və deməli $a^2-c^2>0$ bərabərsizliyi doğrudur. Yəni a^2-b^2 ifadəsi bu ellips üçün həmişə müsbət ədədir, müsbət ədədi isə hər hansı ədədin kvadratı şəklində göstərmək mümkün olduğundan

$$a^2-c^2=b^2 \quad (8)$$

işarə edək. (8) işarələməsini (7) bərabərliyində nəzərə alsaq. onu

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

şəklində yazmaq olar ki, bu münasibətin də hər tərəfini müsbət a^2b^2 ifadəsinə bölsək

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (9)$$

tənliyini alarıq. (9) tənliyi ***ellipsin kanonik*** (yəni, ən sadə) ***tənliyi*** adlanır.

(9) tənliyinə x və y dəyişənləri yalnız cüt dərəcədən daxil olduğundan alınır ki, hər hansı $M(x;y)$ nöqtəsi (9) tənliyi ilə ifadə olunan ellipsin üzərində yerləşib-sə, onda $M_1(-x;y)$ $M_2(-x;-y)$ $M_3(x;-y)$ nöqtələri də həmin ellipsin üzərində yer-ləşəcək. Bu nöqtələr isə koordinat oxlarına nəzərən simmetrik nöqtələr olduğun-dan, kanonik (9) tənliyi ilə ifadə olunan ellips koordinat oxlarına nəzərən sim-metrik əyridir. Odur ki, bu ellipsin formasını yalnız 1-ci rübdə, yəni $x\geq 0$ qiymət-lərində araşdırıb, onu simmetrik olaraq bütün rüblərə davam etdirə bilərik. Bunu üçün, əvvəlcə (9) münasibətini y dəyişəninə nəzərən həll edək.Bu zaman

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

və ya

$$y=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$$

yaxud

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad (10)$$

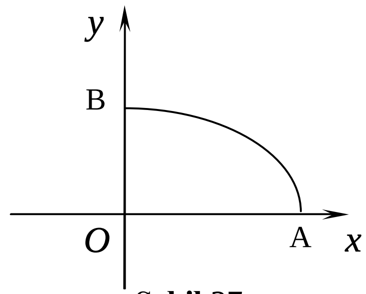
alarıq.(10) münasibətindən görünür ki,

1) $x=0$ qiymətində $y=b$ olur, yəni $B(0;b)$nöqtəsi bu ellipsin üzərindədir;

2) x dəyişəni 0-dan a-ya qədər artdıqca y dəyişəni b-dən 0-a qədər azalır,yəni ellips üzərində olan $M(x;y)$ nöqtəsi sağa və aşağıya doğru hərəkət edir;

3) $x=a$ qiymətində $y=0$ olur, yəni $A(a;0)$ nöqtəsi bu ellipsin üzərində yerləşir;

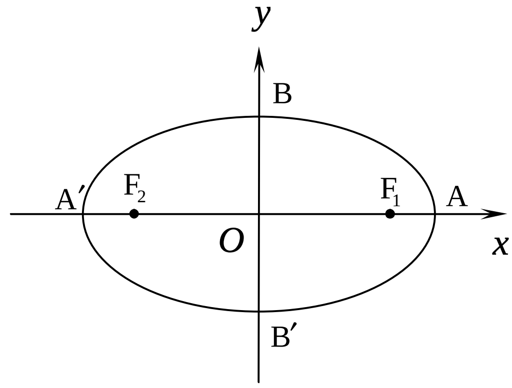
4) $x>a$ qiymətlərində y dəyişəninin həqiqi qiyməti yoxdur, bu isə o deməkdir ki, 1-ci rübdə ellips üzərində absisi a-dan böyük olan heç bir nöqtə yoxdur. (Şəkil)



Şəkil 27

Şəkildə olan bu formanı simmetrik olaraq bütün rüblərə davam etdirsək, ellipsin bütün koordinat müstəvidə formasını almış olarıq (şəkil).

$A(a;0)$, $B(0;b)$, $A'(-a;0)$, $B'(0;-b)$ nöqtələri bu ellipsin təpələri adlanır. $\overline{A'A}$ parçası ellipsin böyük, $\overline{B'B}$ parçası isə ellipsin kiçik oxu adlanır: $\left|\overline{A'A}\right| = 2a, \left|\overline{B'B}\right| = 2b$.



Şəkil 28

$\overline{OA}$ və $\overline{OB}$ parçaları uyğun olaraq, ellipsin böyük və kiçik yarımoxu adlanırlar: $\left|\overline{OA}\right| = a$, $\left|\overline{OB}\right| = b$.

Deməli ellipsin kanonik (9) tənliyindəki a və b ədələri, həndəsi olaraq, ellipsin böyük və kiçik yarımoxlarını ifadə edir.

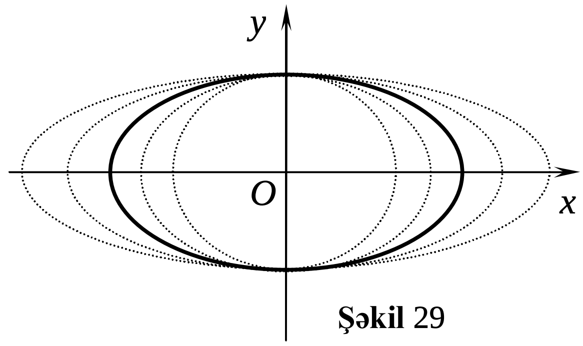
Ellipsin kanonik (9) tənliyində $a=b$ olduqda,bu tənlik

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ və ya } x^2+y^2=a^2$$

şəklinə düşər ki, bu da mərkəzi koordinat başlanğıcında yeləşən, radiusu isə a ədədinə bərabər olan çevrənin tənliyidir.

$\frac{c}{a}$ - kəmiyyəti ellipsin eksentristeti adlanır və e hərfi işarə edilir:

$$e=\frac{c}{a}. \qquad (11)$$



Şəkil 29

Ellips üçün $a>c$ olduğundan,onun

eksentristeti $e<1$ olacaq. Ellipsin eksentristetinin mahiyyətini aydınlaşdırmaq üçün (11) münasibətiinin hər tərəfini kvadrata yüksəltsək, $e^2=\frac{c^2}{a^2}$, $c^2=a^2-b^2$ ifadəsini də nəzərə aldıqda isə $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$ və ya $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-e^2$ bərabərliyini alarıq. Sonuncu münasibətdən

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2} \tag{12}$$

bərabərliyi alınır.(12) münasibətindən göründüyü kimi, $e\to 0$ olduqda, $\frac{b}{a}\to 1$, yəni $a\to b$ olur ki, bu da ellipsin böyük yarımoxunun kiçik yarımoxuna yaxınlaşmasını, daha dəqiq, ellipsin çevrəyə yaxınlaşmasını göstərir.

$e\to 1$ olduqda isə, $\frac{b}{a}\to 0$,yəni $a\ll b$ olur ki, bu da ellipsin böyük yarımoxunun kiçik yarımoxundan çox-çox böyük olduğunu, daha dəqiq, ellipsin böyük ox boyunca dartılmasını göstərir.

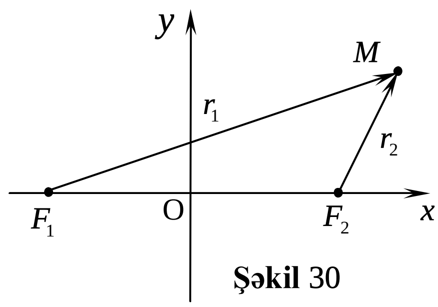
Deməli ellipsin eksentristeti, onun formasını xarakterizə edən kəmiyyət olub, ellipsin böyük oxu boyunca dartılmasını xarakterizə edir.

Hiperbola

Tərif 3. ***Müstəvi üzərində fokuslar adlanan iki nöqtədən məsafələrinin fərqi mütləq qiymətcə sabit kəmiyyət olub, fokuslar arasındakı məsafədən kiçik qalan nöqtələrin həndəsi yeri (yəni, bütün belə nöqtələr çoxluğu) hiperbola adlanır.***

Müstəvi üzərində ixtiyari nöqtənin fokuslardan olan məsafələri, bu nöqtənin ***fokal radiusları*** adlanır.

İndi isə fokuslar arasındakı məsafəsi $2c$ ədədinə, fokusdan məsafələri fərqi isə mütləq qiymətcə $2a$ ədədinə (hiperbolanın tərifinə əsasən, $2a<2c$, yəni $a<c$ olmalıdır) bərabər olan hiperbolanın tənliyini çıxaraq. Ellipsdə olduğu kimi, fokus nöqtələrini absis oxu üzərində elə yerləşdirək ki, ordinat oxu bu fokusları birləşdirən düz xətt



Şəkil 30

parçasının ortasından keçsin, əks təqdirdə bu şərti koordinat oxlarının çevrilməsi vasitəsilə həyata keçirmək olar. Hiperbolanın fokus nöqtələrini, uyğun olaraq, F_1 və F_2 ilə işarə etsək $|F_1F_2| = 2c$, O koordinat başlanğıcı $\overline{F_1F_2}$ orta nöqəsi olduğundan isə $|F_1O| = |OF_2| = \frac{1}{2}|F_1F_2| = c$ alırıq. F_1 və F_2 nöqtələri O koordinat başlanğıcından müxtəlif tərəflərdə yerləşdiklərindən, onların koordinatları $F_1(-c;0)$ və $F_2(c;0)$ olacaq. Axtarılan hiperbolanın üzərində cari koordinatları $(x;y)$ olan ixtiyari M nöqtəsi götürək və bu nöqtənin fokal radiuslarını, yəni fokus nöqtələrindən məsafələrini uyğun olaraq, r_1 və r_2 ilə işarə edək : $r_1 = |F_1M|$ və $r_2 = |F_2M|$. Müstəvi üzərində iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən,

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ;\ r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{13}$$

M nöqtəsi yalnız və yalnız o halda tənliyi axtarılan hiperbolanın üzərində olacaq ki,

$$|r_1 - r_2| = 2a \text{ və ya } r_1 - r_2 = \pm 2a \tag{14}$$

münasibəti ödənsin. (14) tənliyi axtarılan hiperbolanın tənliyidir. Onu koordinatlarla ifadə etmək üçün, (13) ifadələrini (14) münasibətində nəzərə alsaq

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \tag{15}$$

münasibəti alınır. Bu tənlik də tələb olunan hiperbolanın tənliyidir. Lakin bu tənlik istifadə üçün bir qədər yararsızdır. Onu daha asan yadda saxlamaq üçün (15) tənliyini bir qədər çevirək. Bunun üçün (15) bərabərliyinin sol tərəfində duran köklərdən birini əks işarə ilə bərabərliyin digər tərəfinə keçirib, alınan münasibətin iki tərəfini kvadrata yüksəlsək

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

və ya

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

bərabərliyini, müxtəsər vurma düsturlarından istifadə edərək mötərizələri açıb oxşar hədləri islah etdikdən sonra isə

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2$$

və ya

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

bərabərliyini almış olarıq. Bu bərabərliyin hər tərəfini 4-ə bölüb onu

$$cx = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ və ya } \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

şəklində, sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini bir daha kvadrata yüksəltdikdən sonra isə

$$a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = \left(cx - a^2\right)^2,$$

şəklidə yazmaq olar. Müxtəsər vurma düsturlarından istifadə edərək mötərizələri açdıqdan sonra isə, sonuncu münasibətdən

$$a^2\left[x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right] = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

və ya

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

oxşar hədləri islah etdikdən sonra isə

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

yaxud

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right) \tag{16}$$

münasibətini alırıq. Hiperbola üçün $2a < 2c$, buradan isə $a < c$ olduğu yuxarıda qeyd olunduğundan, $c^2 > a^2$ və deməli $c^2 - a^2 > 0$ bərabərsizliyi doğrudur. Yəni $c^2 - a^2$ ifadəsi bu hiperbola üçün həmişə müsbət ədədir. Müsbət ədədi isə hər hansı ədədin kvadratı şəklində göstərmək mümkün olduğundan

$$c^2 - a^2 = b^2 \tag{17}$$

işarə edək. (17) işarələməsini (16) bərabərliyində nəzərə alsaq, onu

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

şəklində yazmaq olar ki, bu münasibətin də hər tərəfini müsbət a^2b^2 ifadəsinə bölsək

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{18}$$

tənliyini alarıq. (18) tənliyi ***hiperbolanın kanonik*** (yəni, ən sadə) ***tənliyi*** adlanır.

(18) tənliyinə x və y dəyişənləri yalnız cüt dərəcədən daxil olduğundan alı-

nır ki, hər hansı $M(x;y)$ nöqtəsi (18) tənliyi ilə ifadə olunan ellipsin üzərində yerləşibsə, onda $M_1(-x;y)$ $M_2(-x;-y)$ $M_3(x;-y)$ nöqtələri də həmin ellipsin üzərində yerləşəcək. Bu nöqtələr isə koordinat oxlarına nəzərən simmetrik nöqtələr olduğundan, kanonik (18) tənliyi ilə ifadə olunan hiperbola da koordinat oxlarına nəzərən simmetrik əyridir. Odur ki, bu hiperbolanın formasını yalnız 1-ci rübdə, yəni $x \geq 0$ qiymətlərində araşdırıb, onu simmetrik olaraq bütün rüblərə davam etdirə bilərik. Bunu üçün, əvvəlcə (18) münasibətini y dəyişəninə nəzərən həll edək. Bu zaman

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \quad \text{və ya} \quad y = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)$$

yaxud

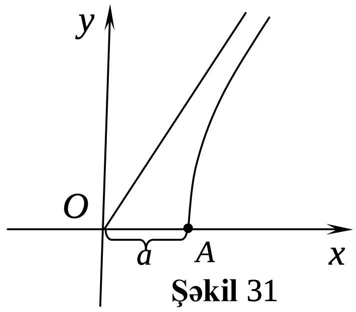
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{19}$$

alarıq.(19) münasibətindən görünür ki,

1) $0 \leq x < \mathrm{a}$ qiymətlərində y dəyişəni həqiqi qiymətlər almır, 1-ci rübdə hiperbola üzərində absisi 0-la a arasında olan heç bir nöqtə yoxdur;

2) $x = a$ qiymətində $y = 0$ olur, yəni $A(a;0)$nöqtəsi bu hiperbolanın üzərində yerləşir;

3) xdəyişəni a-dan başlayaraq artdıqca ydəyişəni 0-dan başlayaraq artır, yəni ellips üzərində olan $M(x;y)$ nöqtəsi sağa və yuxarıya doğru hərəkət edir;



Şəkil 31

4)$x \to +\infty$ qiymətlərində hiperbola $y = \frac{b}{a}x$ düz xəttinə sonsuz olaraq yaxınlaşır, lakin onu kəsmir (şəkil).

Doğrudan da $y = \frac{b}{a}x$ düz xətti üzərində və kanonik (18) tənliyi ilə ifadə olunan hiperbolanın

üzərində absisləri eyni xədədinə bərabər N və M nöqtələri götürsək,

$$|MN| = \left|\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right| = \left|\frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right| = \frac{b}{a}\left|\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right| = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

hiperboladan isə $y = \frac{b}{a}x$ düz xəttinə perpendikulyar endirib onun oturacağını E ilə işarə etsək, hiperbola ilə bu düz xətt arasındakı məsafə üçün isə

$$|ME| < |MN| = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0,\, x \to +\infty$$

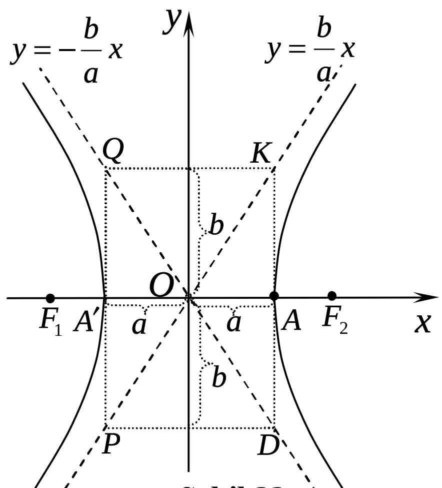
alırıq.

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{20}$$

düz xətləri, kanonik (18) tənliyi ilə ifadə olunan ***hiperbolanın asimptotları*** adlanır.

Şəkildə olan bu formanı simmetrik olaraq bütün rüblərə davam etdirsək, hiperbolanın bütün koordinat müstəvisində formasını almış olarıq (şəkil). $A(a;0)$, $A'(-a;0)$ nöqtələri bu ellirsin təpələri adlanır. $\overline{A'A}$ parçası hiperbolanın həqiqi oxu adlanır: $|\overline{A'A}| = 2a$. $\overline{OA}$ parçası isə hiperbolanın həqiqi yarımoxu adlanır: $|\overline{OA}| = a$

Hiperbolanın kanonik (18) tənliyindəki a və b ədələrinin həndəsi mahiyyətini bilmək üçün, hiperbolanın $A'(-a;0)$ və $A(a;0)$ təpələrin dən bu hiperbolanın həqiqi oxuna perpendikulyarlar çəkək və bu perpendikulyarların asimptotlarla kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq, P, Q, K, D ilə işarə etsək, $PQKD$ düzbucaqlısını almış olarıq. $PQKD$ düzbucaqlısı kanonik tənliyi (18) olan hperbolanın düzbucaqlısı adlanır. Hiperbolanın kanonik (18) tənliyindəki a və b ədələri həndəsi olaraq, hiperbolanın düzbucaqlısının tərəflərini ifadə edir.

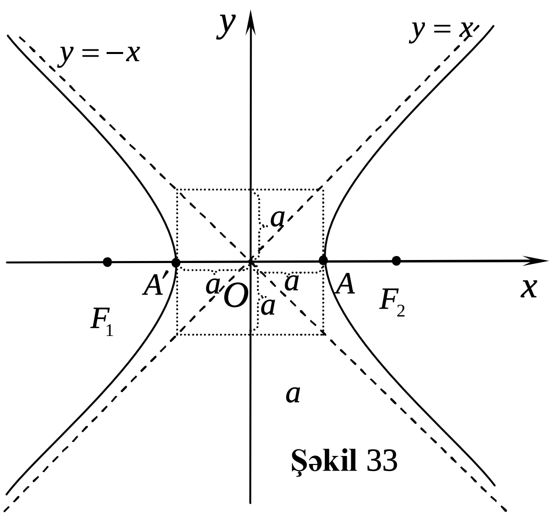


Şəkil 32

Hiperbolanın kanonik (18) tənliyində $a = b$ olduqda, bu tənlik

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

şəklinə düşər ki, bu da bərabəryanlı hiperbolanın tənliyidir.



Şəkil 33

$\frac{c}{a}$ - kəmiyyəti hiperbolanın eksentristeti adlanır və e hərfi işarə edilir:

$$e = \frac{c}{a}\ . \qquad (21)$$

Ellipsdən fərqli olaraq, hiperbola üçün $a < c$ olduğundan,onun eksentristeti $e > 1$ olacaq. Hiperbolanın eksentristetinin mahiyyətini aydınlaşdırmaq üçün (21) münasibətinin hər tərəfini kvadrata yüksəltsək, $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$, $c^2 = a^2 + b^2$ ifadəsini də nəzərə aldıqda isə $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$ və ya $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = e^2 - 1$ bərabərliyini alarıq. Sonuncu münasibətdən

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} \qquad (22)$$

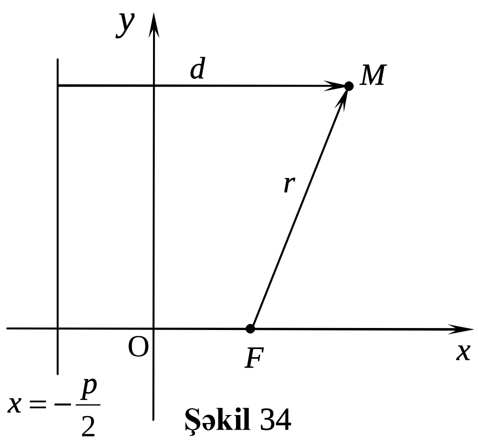
bərabərliyi alınır.

(22) münasibətindən göründüyü kimi, $e \to 1$ olduqda isə, $\frac{b}{a} \to 0$,yəni $a << b$ olur ki, bu da hiperbolanın düzbucaqlısının tərəflərini birinin digərindən çox-çox böyük olduğunu, daha dəqiq, hiperbolanın düzbucaqlısının həqiqi ox boyunca dartılmasını göstərir.

Deməli hiperbolanın eksentristeti, onun düzbucaqlısını xarakterizə edir.

Parabola

Tərif 4. ***Müstəvi üzərində fokus adlanan nöqtədən və direktris adlanan düz xətdən bərabər uzaqlıqda yerləşən nöqtələrin həndəsi yeri (yəni bütün bu cür nöqtələr coxluğu) parabola adlanır.***



Şəkil 34

Müstəvi üzərində olan istənilən nöqtənin parabolanın fokusundan olan məsafəsi bu nöqtənin fokal radiusu adlanır. Fokus nöqtəsinin direktrisdən olan məsafəsi p ədədinə bərabər olan parabolanın tənliyini çıxaraq.

Parabolanın fokus nöqəsini F ilə işarə edək. Ümumiliyi pozmadan bu fokus nöqtəsini absis oxu üzərində elə yerləşdirək ki, ordinat oxu fokusdan direktrisə endirilmiş perpendikulyarın ortasından keçsin. Onda fokus nöqtəsinin koordinatı $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, direktrisin tənliyi $x=-\frac{p}{2}$ olacaq. Axtarılan parabolanın üzərində cari koordinatları $(x;y)$ olan ixtiyari M nöqtəsi götürək və bu nöqtənin fokal radiusunu, yəni $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ fokus noqtəsindən məsafəsini r, direktrisdən olan məsafəsini isə d ilə işarə edək : $r=\left|\overline{FM}\right|, d=\left|\overline{NM}\right|=\left|\overline{DC}\right|$. Müstəvi üzərində iki nöqtə arasıdakı məsafə düsturuna əsasən, $r=\left|\overline{FM}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$ və $d=\left|\overline{NM}\right|=\left|\overline{DC}\right|=x+\frac{p}{2}$ (23) $M(x;y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız o halda tənliyi axtarılan hiperbolanın üzərində olacaq ki, $r=d$ (24) bərabərliyi ödənsin. (24) tənliyi axtarılan parabolanın tənliyidir. Onu koordinatlarla ifadə etmək üçün, (23) ifadələrini (14) münasibətində nəzərə alsaq $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$ (25) münasibəti alınır. Bu tənlik də tələb olunan parabolanın tənliyidir. Lakin bu tənlik istifadə üçün bir qədər yararsızdır. Onu daha asan yadda saxlamaq üçün (25) tənliyini bir qədər çevirək. Bunun üçün (25) bərabərliyinin iki tərəfini kvadrata yüksəlsək

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

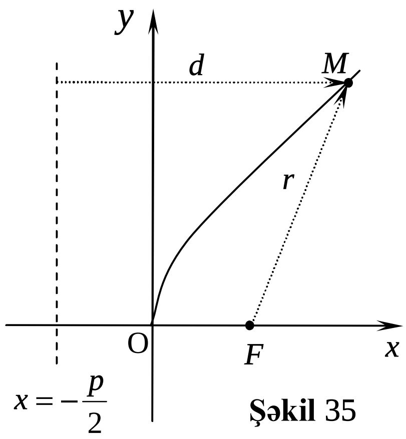
müxtəsər vurma düsturları ilə mötərizələrdən azad olduqda,

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

oxşar hədləri islah etdikdən sonra isə

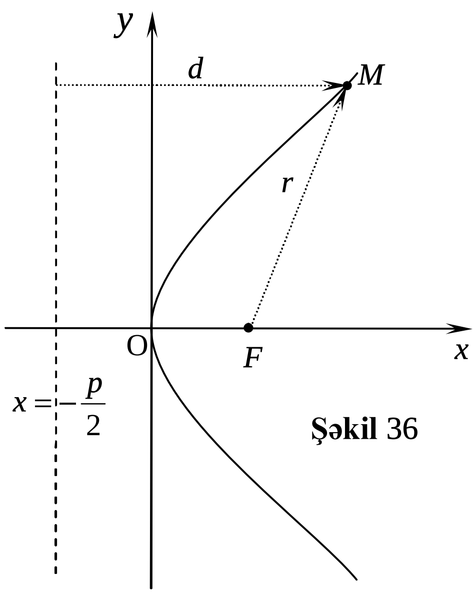
$$y^2=2px \qquad (26)$$

tənliyini alarıq. (26) tənliyi ***parabolanın kanonik*** (yəni, ən sadə) ***tənliyi*** adlanır.



Şəkil 35

Ellips və hiperbolanın kanonik tənliklərindən fərqli olaraq, parabolanın (26) kanonik tənliyinə yalnız y dəyişəni cüt dərəcədən daxil olduğundan hər hansı $M(x;y)$ nöqtəsi bu parabolanın üzərindədirsə, onda $M_1(x;-y)$ nöqtəsi də bu parabolanın üzərində olacaq. Bu nöqtələr isə Ox oxuna nəzərən simmetrik nöqtələr olduğundan, kanonik (26) tənliyi ilə ifadə olunan parabola da Ox oxuna nəzərən simmetrik əyri olacaq. Odur ki. Bu parabolanın yuxarı yarımmüstəvidə, yəni $y>0$ qiymətlərində formasını araşdırıb, onu simmetrik olaraq bütün müstəviyə davam etdirək. Bunun üçün (26) münasibətinini y dəyişəninə nəzərən həll etsək



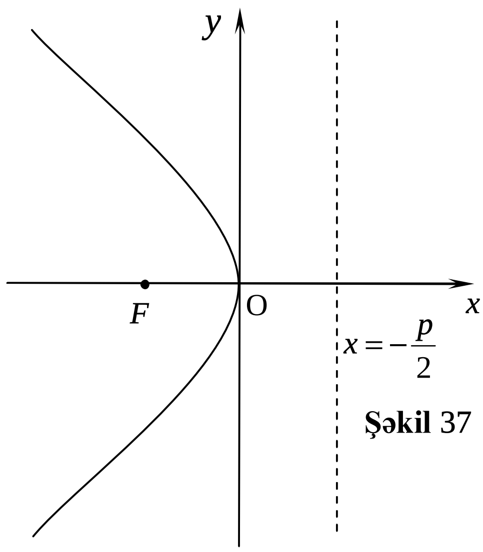
Şəkil 36

$$y=\sqrt{2px} \qquad (27)$$

münasibətini alırıq. (27) münasibətindən görünür ki :

1) $x<0$ qiymətlərində y dəyişəni həqiqi qiymət almır ($p>0$ olduğundan), yəni (26) tənliyi ilə ifadə olunan parabolanın üzərində absisi mənfi qiymət alan heç bir nöqtə yoxdur;

2) $x=0$ qiymətində $y=0$ olur, yəni (26) tənliyi ilə ifadə edilən parabola koordinat başlanğıcından keçir;



Şəkil 37

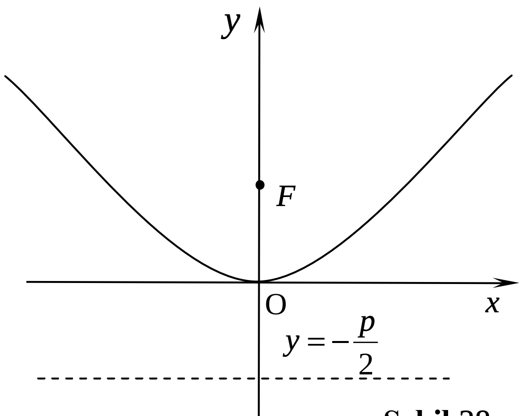
3) x dəyişəni 0-dan başlayaraq artdıqca, y dəyişəni də 0-dan başlayaraq artacaq, yəni parabola üzərində olan $M(x;y)$ nöqtəsi koordinat müstəvisində sağa və yuxarıya doğru hərəkət edəcək

Parabolanın yuxarı yarımmüstəvidə olan bu formasını Ox oxuna nəzərən simmetrik olaraq bütün koordinat müstəvisinə davam etdirsək, kanonik (26) tənliyi ilə ifadə olunan parabolanın şəkildəki formasını almış olarıq. (26) tənliyinə daxil olan p parametri parabolanın qolları arasındakı məsafəni xarakterizə edir. p ədədi böyüdükcə, bu qollar daha geniş, p kiçildikcə, qollar daha yaxın olacaq.

Əgər əvvəlcədən fokus nöqtəsini absis oxu üzərində koordinat başlanğıcından müsbət istiqamətdə deyil, mənfi istiqamətdə, direktrisin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsini isə əksinə, koordinat başlanğıcından mənfi istiqamətdə deyil, müsbət istiqamətdə götürsə idik (yəni $p>0$ deyil, $p<0$ olsa idi) onda axtarılan parabolanın

$$y^2 = -2px \qquad (28)$$

şəklində kanonik tənliyini, fokus nöqtəsini absis oxu üzərində deyil, ordinat oxu üzərində, direktrisi isə absis oxuna deyil, ordinat oxuna perpendikulyar götürsəydik onda axtarılan parabolanın

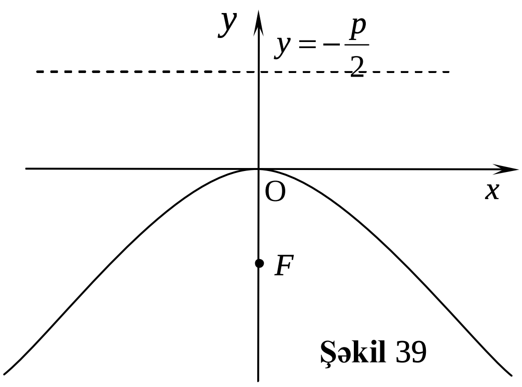


Şəkil 38

$$x^2 = 2py \qquad (29)$$

və ya

$$x^2 = -2py \qquad (30)$$



Şəkil 39

şəklində kanonik tənliklərini almış olardıq.

(28), (29), (30) parabolaları kanonik (26) tənliyi ilə ifadə olunan parabolaya ***alternativ parabolalar*** adlanırlar.

İkinci tərtib mərkəzi əyrilər

2-ci tərtib əyrilər – ellips, hiperbola və parabolanı öyrənərkən, onların müvafiq kanonik tənlikləri xüsusi şərtlər-fokus nöqtələrinin absis oxu üzərində qəbul edilmələri şərtləri daxilində çıxarılmışdı. Lakin, bu şərtlərin təmin edilmədiyi bir çox praktik məsələlərin həlli zamanı 2-ci tərtib əyrilər kanonik tənliklərlə ifadə edilmir.

2-ci tərtib L əyrisinin ümumi tənliyinin

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

şəklində verildiyini əvvəlki mövzularda qeyd etmişdik. Hər üçünün eyni zamanda sıfıra bərabər olmadığı A, B və C əmsalları üçün

a) $B^2 - AC > 0$ bərabərsizliyi ödəndikdə L əyrisi ***elliptik tip*** əyri;

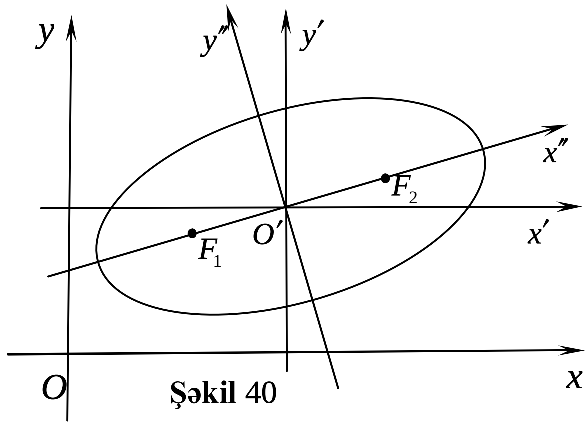
b) $B^2 - AC = 0$ bərabərsizliyi ödəndikdə L əyrisi ***parabolik tip*** əyri;

c) $B^2 - AC < 0$ bərabərsizliyi ödəndikdə L əyrisi ***hiperbolik tip*** əyri adlanır.

Koordinat başlanğıcını, koordinat oxlarının istiqamətini dəyişmədən, müstəvinin hər hansı $O'(x_0; y_0)$ nöqtrəsinə köçürməklə, yəni koordinat oxlarının paralel

$$\begin{cases} x = x' + x_0; \\ y = y' + y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

çevirməsindən istifadə etməklə (1) tənliyini



Şəkil 40

$$A(x' + x_0)^2 + 2B(x' + x_0)(y' + y_0) + C(y' + y_0)^2 + 2D(x' + x_0) + 2E(y' + y_0) + F = 0$$

və ya

$$A\left(x'^2 + 2x'x_0 + x_0^2\right) + 2B(x'y' + x'y_0 + y'x_0 + x_0y_0) + C\left(y^2 + 2y'y_0 + y_0^2\right) +$$
$$+ 2Dx' + 2Dx_0 + 2Ey' + 2Ey_0 + F = 0$$

şəkildə, yeni x' və y' dəyişənlərinə nəzərən qruplaşdırdıqdan sonra isə

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2(Ax_0 + By_0 + D)x' + 2(Bx_0 + Cy_0 + E)y' +$$
$$+ \left(Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F\right) = 0 \qquad (3)$$

bərabərliyini almış olarıq. Yeni O' koordinat başlanğıcının x_0 və y_0 koordinatlarını elə seçək ki, (3) tənliyində x' və y' hədlərinin əmsalları sıfra bərabər olsun, yəni

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0; \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

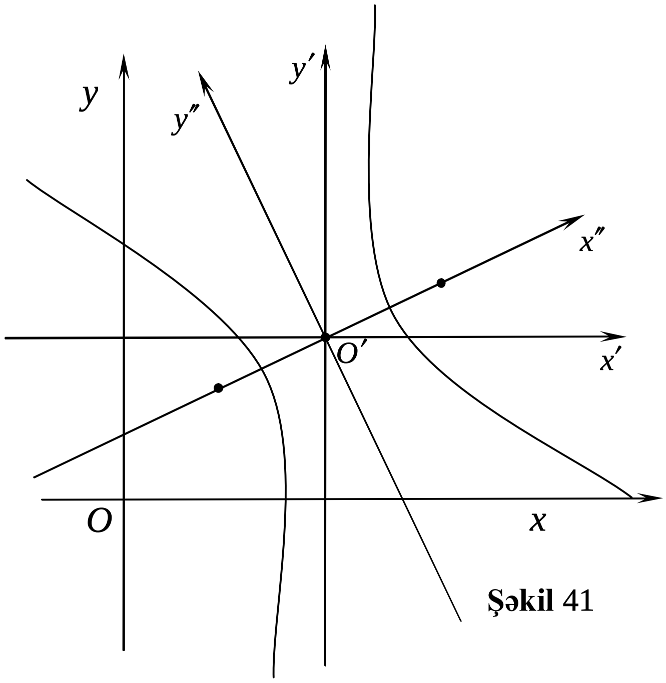
şərtləri ödənsin.Bu halda (3) tənliyi

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + F' = 0 \quad (5)$$

şəklinə düşəcək ki, burada yeni A', B', C', F' əmsalları

$$\begin{cases} A' = A; \\ B' = B; \\ C' = C; \\ F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F \end{cases} \quad (6)$$

bərabərlikləri ilə təyin olunurlar. (6) bərabərliklərindən də göründüyü kimi, $A'C' - B'^2 = AC - B^2$ olduğundan, koordinat oxlarının parallel (2) köçürülməsi zamanı 2-ci tərtib əyrinin tipi dəyişmir. (4) tənliyi ümumi (1) tənliyi ilə ifadə olunan 2-ci tərtib ***əyrinin mərkəzinin tənliyi***, x_0 və y_0 koordinatları bu tənliyi ödəyən $O'(x_0; y_0)$ nöqtəsi isə bu ***əyrinin mərkəzi*** adlanır.



Şəkil 41

(4) sistemi x_0 və y_0 dəyişənlərinə nəzərən ikiməchullu iki xətti cəbri tənliklər sistemidir, onun əsas determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0 \quad (7)$$

isə (4) sisteminin yeganə həlli, (1) tənliyi ilə ifadə olunan 2-ci tərtib əyrinin isə yeganə mərkəzi var.

Əmsalları (7) şərtini ödəyən 2-ci tərtib əyrilər mərkəzi olan əyrilər adlanır. (7) şərti isə yalnız $B^2 - AC > 0$ bərabərsizliyini ödəyən elliptik tip və $B^2 - AC < 0$ bərabərsizliyini ödəyən hiperboliptik tip əyrilər üçün ödəndiyindən, yalnız elliptik və hiperboliptik tip əyrilər mərkəzi olan əyrilərdirlər. $B^2 - AC = 0$ şərtini ödəyən paraboliktik tip əyrilər mərkəzi olmayan 2-ci tərtib əyrilərə aiddirlər.

2-ci tərtib L əyrisinin ümumi (1) tənliyini (5) şəklinə gətirdikdən sonra, koordinat oxlarının yeni $O'(x_0; y_0)$ koordinat başlanğıcının ətrafında müəyyən α

bucağı qədər dönməsini ifadə edən

$$\begin{cases} x' = x''\cos a - y''\sin a\,; \\ y' = x''\sin a + y''\cos a \end{cases} \tag{8}$$

çevirməsi vasitəsi ilə (5) tənliyinin özünü də

$$A'(x''\cos a - y''\sin a)^2 + 2B'(x''\cos a - y''\sin a)(x''\sin a + y''\cos a) +$$
$$+ C'(x''\sin a + y''\cos a)^2 + F' = 0$$

şəklində, mötərizələri açıb x'' və y'' dəyişənlərinə nəzərən qruplaşdırdıqdan sonra isə

$$A''x''^2 + 2B''x''y'' + C''y''^2 + F'' = 0 \tag{9}$$

şəklində yazmaq olarki. burada A'', B'', C'', F'' əmsalları

$$A'' = A'\cos^2 a + 2B'\cos a\,\sin a + C'\sin^2 a\;;$$
$$B'' = -A'\sin a\,\cos a + B'\left(\cos^2 a - \sin^2 a\right) + C'\sin a\,\cos a\;; \tag{10}$$
$$C'' = A'\sin^2 a - 2B'\cos a\,\sin a + C'\cos^2 a$$

bərabərlikləri ilə müəyyən olunurlar. a bucağını elə seçək ki, (9) tənliyindəki B'' əmsalı sıfıra bərabər olsun: $B'' = 0$. $A' = C'$ qiymətlərində a bucağı $\cos 2a = 0$ tənliyindən $a = \frac{p}{4}$ kimi, $A' \neq C'$ qiymətlərində isə $2B'\cos 2a = (A' - C')\sin 2a$ tənliyindən $a = \frac{1}{2} arctg \frac{2B'}{A' - C'}$ kimi tapılır.Bu halda (9) tənliyi

$$A''x''^2 + C''y''^2 + F'' = 0 \tag{11}$$

şəklinə düşər ki, bu tənlik də ümumi (1) tənliyi ilə ifadə olunan 2-ci tərtib L əyrisinin ***kanonik tənliyidir***.

Qeyd edək ki bu çevirmələr zamanı 2-ci tərtib əyrinin tipini müəyyən edən ifadənin qiyməti

$$A''C'' - B''^2 = \left(A'\cos^2 a + 2B'\cos a\,\sin a + C'\sin^2 a\right)\left(A'\sin^2 a - 2B'\cos a\,\sin a + C'\cos^2 a\right) -$$
$$-\left(B'\left(\cos^2 a - \sin^2 a\right) + (C' - A')\sin a\,\cos a\right)^2 = A'C'\left(\cos^2 a + \sin^2 a\right)^2 - B'^2\left(\cos^2 a + \sin^2 a\right)^2 =$$
$$= A'C' - B'^2 = AC - B^2$$

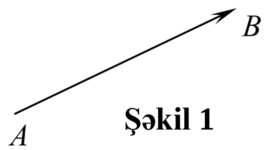
dəyişmədiyindən, 2-ci tərtib əyrinin tipi də dəyişmir.

Vektor anlayışı.

Təbiətdə elə kəmiyyətlər var ki, onlar təkcə öz ədədi qiymətləri ilə tam xarakterizə oluna bilirlər. Bu cür kəmiyyətlər ***skalyar kəmiyyətlər*** adlanırlar. Skalyar kəmiyyətlərə misal olaraq uzunluq, sahə, həcm və s. kəmiyyətləri göstərə biəlrik.

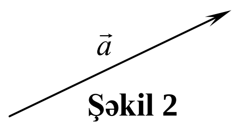
Lakin təbiətdə elə kəmiyyətlərə də rast gəlinir ki, onlar yalnız tək ədədi qiymətləri ilə xarakterizə oluna bilmirlər, onları tam xarakterizə etmək üçün bu kəmiyyətlərin ədədi qiymətlərindən əlavə, onların istiqaməti də verilməlidir. Bu cür kəmiyyətlər isə ***vektorial kəmiyyətlər*** adlanırlar. Vektorial kəmiyyətlərə qüvvəni misal göstərmək olar.

Riyaziyyatda vektorial kəmiyyətləri işarə etmək üçün vektor anlayışından istifadə edirlər.



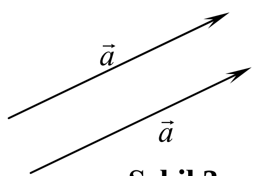
Şəkil 1

Başlanğıcı və sonu olan, istiqamətlənmiş düz xətt parçası vektor adlanır və $\overrightarrow{AB}$ kimi işarə edilir; A nöqtəsi vektorun başlanğıcı, B nöqtəsi isə vektorun sonu adlanır. Vektorun istiqaməti kimi, onun başlanğıcından sonuna doğru olan istiqamət götürülür. Vektorlar, adətən birinci başlanğıcı, ikinci isə sonu göstərilməklə yuxarısında ox işarəsi qoyulan latın əlifbasının iki böyük hərfi ilə işarə edilir. Bir çox hallarda, vektorlar başlanğıcı və sonu göstərilmədən, latın əlifbasının bir kiçik hərfi ilə də $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}$ və s. kimi də işarə edilir. Başlanğıcı ilə sonu üst-üstə düşən vektorlar sıfır vektor adlanır və $\vec{0}$ kimi işarə olunur. Vektorun başlanğıcı ilə sonunu birləşdirən düz xətt parçasının uzunluğu vektorun uzunluğu adlanır, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, yaxud $|\vec{a}|$ işarə edilir. Aydındır ki, $\vec{0}$ vektorun uzunluğu $\left|\vec{0}\right| = 0$.



Şəkil 2

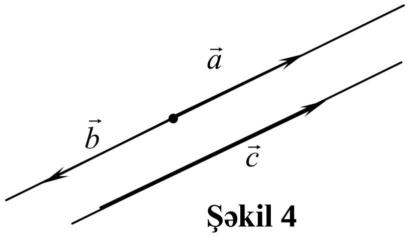
İki vektor o halda bərabər adlanır ki, onların uzunluqları bərabər, istiqamətləri isə eyni olsun. Odur ki, hər hansı vektoru onun istiqaməti və uzunluğunu dəyişmədən fəzanın istənilən nöqtəsinə köçürmək olar. Bu zaman alınmış vektor əvvəlki vektora bərabər olacaq. Vektorlar üzərində bu əməliyyat vektorların paralel köçürülməsi adlanır. Bu mənada bu kursumuzda



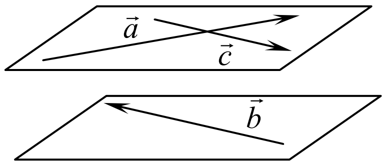
Şəkil 3

sərbəst vektorları, yəni paralel köçürmə zamanı dəyişməyən vektorları öyrənirik.

Tərif 1. Eyni və ya paralel düz xətt üzərində yerləşə bilən vektorlar ***kollinear vektorlar***, eyni və ya paralel müstəvilər üzərində yerləşə bilən vektorlarsa ***komplanar vektorlar*** adlanırlar.



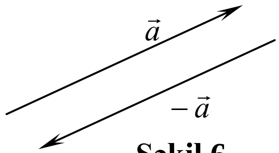
Şəkil 4



Şəkil 5

$\vec{0}$ vektorun istiqaməti təyin olunmadığın-dan, o istənilən vektora kolinear hesab olunur.

Uzunluğu verilmiş $\vec{a}$ vektorun uzunluğuna bərabər, istiqaməti isə onun əksinə yönəlmiş vektor, verilmiş $\vec{a}$ vektoruna əks vektor adlanır və $-\vec{a}$ kimi işarə edilir.



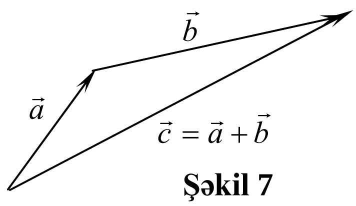
Şəkil 6

Vektor üzərində xətti əməllər və onların xassələri.

Vektorların toplanması, çıxılması və vektorların ədədə vurulması əməlləri vektorlar üzərində xətti əməllər adlanır.

<u>Vektorların toplanması.</u>

Tərif 2. ***Verilmiş iki*** $\vec{a}$ ***və*** $\vec{b}$ ***vektorlarının cəmi elə vektora deyilir ki, ikinci vektorun başlanğıcını birinci vektorun sonuna gətirdikdən sonra, bu vektor birincinin başlanğıcından ikinci sonuna yönəlsin.***



Şəkil 7

Vektorların toplanması zamanı aşağıdakı doğrudur.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ -vektorların toplanmasında kommutativlik;

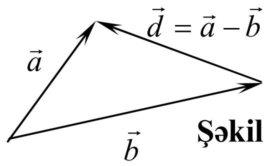
2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$- vektorların toplanmasında assosiativlik.

<u>Vektorların çıxılması.</u>

Tərif 3. ***Verilmiş*** $\vec{a}$ ***və*** $\vec{b}$ ***vektorlarının*** $\vec{a} - \vec{b}$ ***fərqi elə*** $\vec{c}$ ***vektoruna deyilir ki,*** $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ ***bərabərliyi ödənsin.***

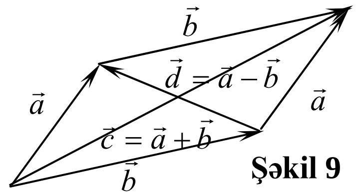
Vektorların fərqinin bu tərifini həndəsi olaraq, aşağıdakı şəkildə də ifadə etmək olar:

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının $\vec{a}-\vec{b}$ fərqi, elə $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, bu vektorları eyni başlanğıca gətirdikdən sonra, həmin vektor ikincinin sonundan birincinin sonuna yönəlsin.



Şəkil 8

Asanlıqla göstərmək olar ki, verilmiş $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üzərində paraleloqram qursaq, bu paraleloqramın dioqonalları bu vektorların cəmini və fərqini ifadə edəcək.



Şəkil 9

Vektorların cəmini və fərqini tapılmasının bu qaydası paraleloqram qaydası adlanır.

Vektorların ədədə vurulması

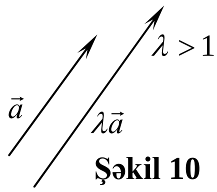
Tərif 4. ***$\vec{a}\neq\vec{0}$ vektorunun həqiqi λ ədədinə hasili, elə $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki,***

1. Bu vektorun uzunluğu λ ədədinin mütləq qiymətilə $\vec{a}$ uzunluğu hasilinə bərabər olsun :$|\vec{c}|=|\lambda||\vec{a}|$;

2. $\lambda>0$ qiymətlərində, istiqaməti $\vec{a}$ vektorunun istiqaməti ilə, $\lambda<0$ qiymətlərində isə $\vec{a}$ vektorunun istiqamətinin əksinə yönəlmiş olsun.

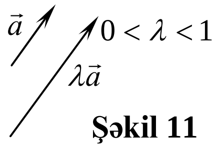
Vektorun ədədə hasilinin aşağıdakı xassələri var:

İstənilən λ, μ həqiqi ədədləri və $\vec{a}\neq\vec{0}$ vektoru üçün



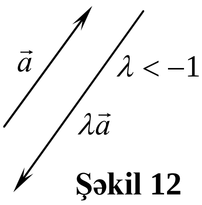
Şəkil 10

1. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ - ədədi vuruqlara görə assosativlik xassəsi;
2. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ - ədədi vuruqların cəminə nəzərən distributivlik xassəsi;
3. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ - vektorların cəminə nəzərən distributivlik xassəsi.



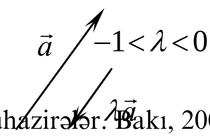
Şəkil 11

Vektorun ədədə hasilinin tərifindən də aydın görünür ki, $\lambda>0$ qiymətlərində $\vec{c}=\lambda\vec{a}$ vektorunun istiqaməti $\vec{a}$ vektorunun istiqamətində olub, uzunluğu isə $0<\lambda<1$ qiymətlərində $\vec{a}$ vektorunun uzunluğundan λ dəfə kiçik, $\lambda>1$ qiymətlərində isə λ dəfə böyükdür;



Şəkil 12

$\lambda<0$ qiymətlərində $\vec{c}=\lambda\vec{a}$ vektorunun istiqaməti $\vec{a}$ vektorunun istiqamətinin əksinə yönəlib,uzunluğu isə $-1<\lambda<0$

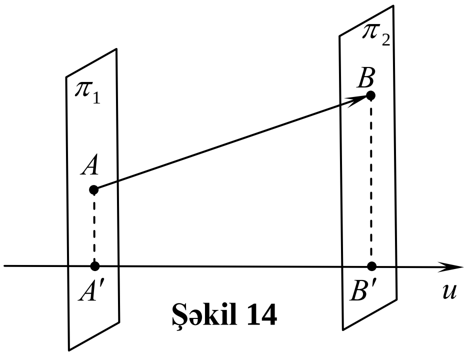


Şəkil 13

qiymətlərində $\vec{a}$ vektorunun uzunluğundan λ dəfə kiçik, $\lambda < -1$ qiymətlərində isə λ dəfə böyükdür.

Vektorun oxa proeksiyası. Proeksiyanın əsas xassələri

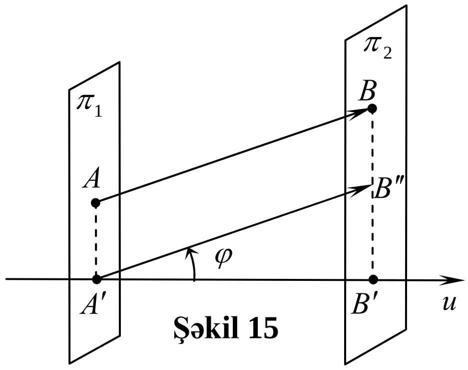
Tutaq ki, fəzada $|\overrightarrow{AB}|$ vektoru və $\vec{u}$ oxu verilib. $\overrightarrow{AB}$ vektorunun uc nöqtələrindən $\vec{u}$ oxuna perpendikulyar π_1 və π_2 müstəviləri keçirək, bu müstəvilər $\vec{u}$ oxunu kəsdiyi nöqtələri, uyğun olaraq A' və B' ilə işarə edək.



Şəkil 14

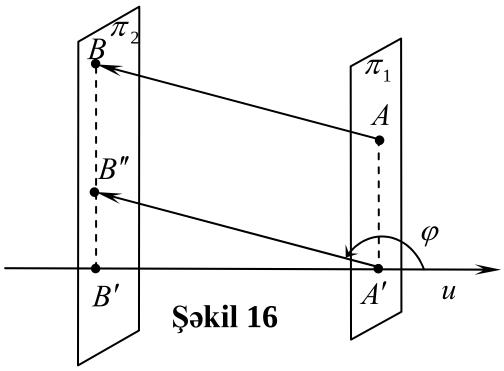
Tərif 5. ***$\vec{u}$ oxu üzərində istiqamətlənmiş $A'B'$ parçasının qiyməti $\overrightarrow{AB}$ vektorunun $\vec{u}$ oxuna proeksiyası adlanır. $pr_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}$ kimi işarə olunur.***

$\overrightarrow{AB}$ vektorunun başlanğıcını A' nöqtəsinə gətirsək $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B''}$ alarıq. $A'B' = |\overrightarrow{A'B''}|\cos\varphi$ olduğundan,



Şəkil 15

$$pr_{\vec{u}}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi = |\overrightarrow{AB}|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\vec{u}}\right), \qquad (1)$$

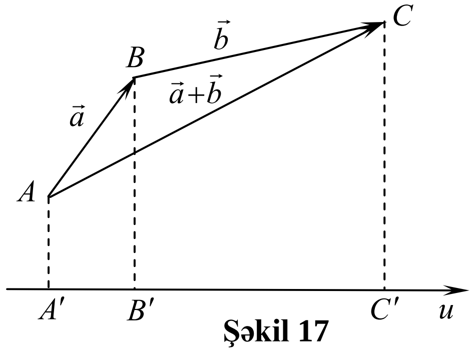


Şəkil 16

yəni $\overrightarrow{AB}$ vektorunun $\vec{u}$ oxuna proeksiyası bu vektorunun $|\overrightarrow{AB}|$ uzunluğu ilə onun $\vec{u}$ oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir.

Proyeksiyanın iki vacib xassəsi var.

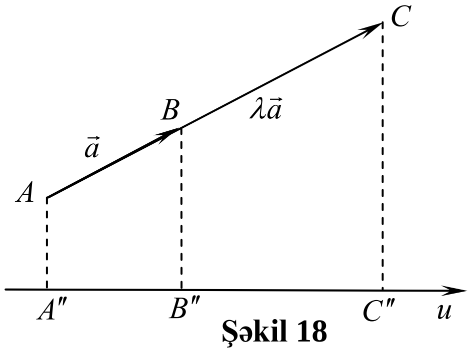
Xassə 1. ***İki vektorun cəminin hər hansı oxa proeksiyası, bu vektorların həmin oxa proeksiyaları cəminə bərabərdir :*** $pr_{\vec{u}}(\vec{a}+\vec{b}) = pr_{\vec{u}}\vec{a} + pr_{\vec{u}}\vec{b}$ **.**



Şəkil 17

Bu xassənin isbatı $pr_{\vec{u}}(\vec{a}+\vec{b}) = A'C'$, $pr_{\vec{u}}\vec{a} = A'B'$, $pr_{\vec{u}}\vec{b} = B'C'$, bərabərliklərini nəzərə almaqla $A'C' = A'B' + B'C'$ bərabərliyindən alınır.

Xassə 2. ***Vektorun ədədə hasilinin hər hansı oxa proyeksiyası. həmin ədədlə bu vektorun həmin oxa proyeksiyasının hasilinə bərabərdir:*** $pr_{\vec{u}}(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot pr_{\vec{u}} \vec{a}$



Şəkil 18

Bu xassənin isbatı $pr_{\vec{u}}(\lambda \cdot \vec{a}) = A''C''$, $pr_{\vec{u}} \vec{a} = A''B''$ bərabərliklərini nəzərə almaqla $A''C'' = \lambda \cdot A''B''$ bərabərliyindən alınır.

İki vektorun skalyar hasili. Skalyar hasilin əsas xassələri

Tərif 6. ***Sıfır vektordan fərqli, iki*** $\vec{a}$ ***və*** $\vec{b}$ ***vektorlarının skalyar hasili, bu vektorların uzunluqları ilə onlar arasında qalan bucağın kosinusu hasilinə bərabər olan ədədə (skalyara) deyilir və*** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ***kimi işarə olunur:***

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi . \qquad (2)$$

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından biri $\vec{0}$ vektor olduqda bu vektorların skalyar hasili ***sıfıra*** bərabər qəbul olunur.

Proeksiyanın yuxarıda göstərilən (1) ifadəsini, skalyar hasil üçün (2) düsturunun sağ tərəfinə tətbiq etsək,

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{b}| \cdot pr_{\vec{b}} \vec{a} \quad \text{və} \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot pr_{\vec{a}} \vec{b} \qquad (3)$$

bərabərliklərini alırıq ki, onda (1) münasibətini

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot pr_{\vec{b}} \vec{a} \qquad (4)$$

şəklində də yaza bilərik.

Deməli, ***iki vektorun skalyar hasili, bu vektorlardan birinin uzunluğu ilə, digərinin bu vektora proeksiyasının hasilinə bərabərdir.***

İki vektorun skalyar hasilinin aşağıdakı xassələri var.

Xassə 1. İki vektorun skalyar hasilində kommutativlik (yerdəyişmə) qanunu doğrudur :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} . \qquad (5)$$

Bu xassənin isbatı iki vektorun skalyar hasili üçün (1) bərabərliyindən alınan $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ və $\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\varphi$ münasibətlərinin sağ tərəflərinin bərabər olmasından alınır.

(4) düsturundan və proeksiyanın xassələrindən istifadə etməklə, skalyar hasilin aşağıdakı daha iki xassəsini göstərmək olar.

Xassə 2. İki vektorun cəminin üçüncü vektora skalyar hasili, bu ikivektorun üçüncü vektora skalyar hasilləri cəminə bərabərdir:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} \qquad (6)$$

Doğrudan da, proeksiyanın 1-ci xassəsinə əsasən,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\cdot pr_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=|\vec{c}|\cdot\left(pr_{\vec{c}}\vec{a}+pr_{\vec{c}}\vec{b}\right)=|\vec{c}|\cdot pr_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\cdot pr_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

alırıq.

Xassə 3. Vektorun ədədə hasilinin digər vektora skalyar hasili, bu vektorların skalyar hasilinin həmin ədədə hasilinə bərabərdir :

$$(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right). \qquad (7)$$

Doğrudan da, proeksiyanın 2-ci xassəsinə əsasən,

$$(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot pr_{\vec{b}}(\lambda\cdot\vec{a})=\left|\vec{b}\right|\cdot\left(\lambda\cdot pr_{\vec{b}}\vec{a}\right)=\lambda\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot pr_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda\cdot\left(\left|\vec{b}\right|\cdot pr_{\vec{b}}\vec{a}\right)=\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

alırıq.

Qeyd. Skalyar hasilin yuxarıda göstərilən bu üç xassəsi göstərir ki, $\vec{x}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ və $\vec{y}=\nu\vec{c}+k\vec{d}$ şəklində verilmiş iki vektorun skalyar hasilini çoxhədlinin çoxhədliyə vurulması qaydasını tətbiq etməklə

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right)\cdot\left(\nu\vec{c}+k\vec{d}\right)=\lambda\mu\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\lambda k\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)+\mu\nu\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\mu k\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right) \qquad (8)$$

kimi hesablana bilər.

Xassə 4. Vektorun özünə skalyar hasili bu vektorun uzunluğunun kvadratına bərabərdir :

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2. \qquad (9)$$

Doğrudan da vektor özü ilə 0°-li bücaq əmələ gətirdiyindən, $\cos 0^\circ=1$ olduğunu nəzərə almaqla skalyar hasilin (1) düsturundan

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|^2$$

alırıq.

Vektorun özünə skalyar hasili bu vektorun ***skalyar kvadratı*** adlanır və $\vec{a}^2$ kimi işarə olunur. (9) bərabərliyindən göründüyü kimi, vektorun skalyar kvadratı üçün $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərlikdən isə vektorun uzunluğunun, onun skalyar kvadratı ilə ifadəsi olan

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} \qquad (10)$$

düsturunu alırıq.

Xassə 5. ***Qarşılıqlı perpendikulyar olan iki vektorun skalyar hasili sıfıra bərabərdir, və tərsinə, skalyar hasili sıfıra bərabər olan sıfır vektordan fərqli iki vektor qarşılıqlı perpendikulyardırlar:***

$\vec{a} \perp \vec{b}$ ***isə*** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ və $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ ***isə*** $\vec{a} \perp \vec{b}$

olur.

Doğrudan da, $\vec{a} \perp \vec{b}$ olduqda bu vektorlar arasında qalan bucaq $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ olduğundan, iki vektorun skalyar hasili üçün (1) düsturundan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

alırıq.

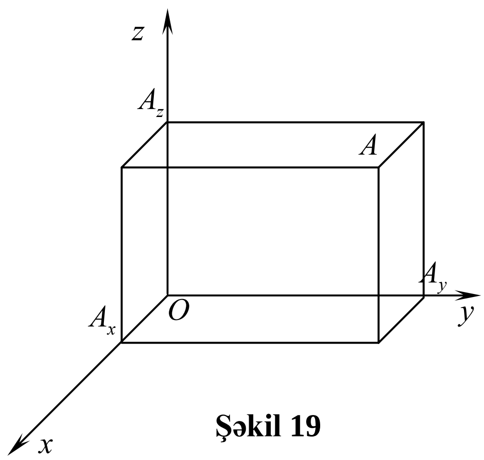
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ olduqda isə (1) düsturundan, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = 0$ bərbərliyi, $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ qiymətlərini nəzərə aldıqda isə $\cos\varphi = 0$, və ya $\varphi = \frac{\pi}{2}$ alınır ki, bu da $\vec{a} \perp \vec{b}$ olduğunu göstərir.

Sonuncu xassə göstərir ki, ***sıfır vektordan fərqli iki vektorun qarşılıqlı perpendikulyar olması üçün zəruri və kafi şərt, onların skalyar hasilinin sıfıra bərabər olmasıdır.***

Oduqca vacib olan bu xassədən fəzada analitik həndəsənin müxtəlif məsələlərində də istifadə olunacaq.

Vektorun uzunluğu. Vektorun koordinatları.
Vektorun yönəldici kosinusları

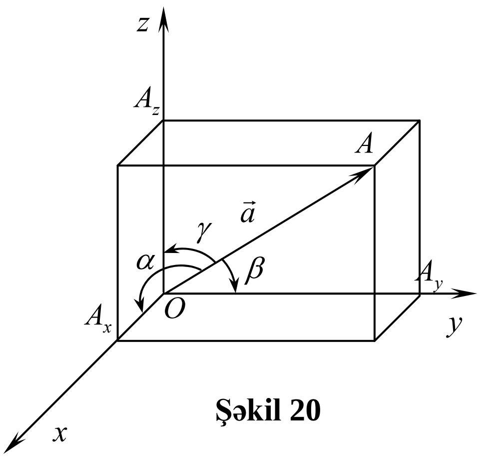
Ortaq O başlanğıc nöqtələri olan, üzərlərində parça uzunluğu ölçmək üçün eyni miqyas təyin edilmiş üç Ox, Oy, Oz ədəd oxları fəzada düzbucaqlı koordinat sistemi əmələ gətirir. Ortaq O başlanğıc nöqtəsi koodinat başlanğıcı, Ox, Oy, Oz ədəd oxları isə koordinat oxları-Ox absis oxu, Oy -ordinat oxu, Oz -aplikat oxu adlanır. Koordinat oxlarının təyin etdikləri Oxy, Oxz, Oyz müstəviləri isə koordinat müstəviləri adlanırlar. Bu koordinat sistemi vasitəsi ilə fəzanın istənilən M nöqtəsinə qarşı yeganə qayda ilə nizamlanmış $(x; y; z)$ ədədlər üçlüyü qarşı qoymaq olar, və tərsinə nizamlanmış hər $(x; y; z)$ ədədlər üçlüyü bu koordinat sistemində fəzanın yeganə M nöqtəsini müəyyən edir.



Şəkil 19

Tutaq ki, fəzada hər hansı $\vec{a}$ vektoru verilmişdir. Uzunluğunu və istiqamətini dəyişmədən, bu vektorun başlanğıcını koordinat başlanğıcına gətirsək, verilmiş $\vec{a}$ vektoruna bərabər vektor alarıq. Odur ki,bundan sonra, fəzada vektorları, ümumiliyi pozmadan, koordinat başlanğıcından çıxan vektorlar kimi təsvir edəcəyik.

$\vec{a}$ vektorunun sonunu A ilə işarə edək. A nöqtəsindən koordinat müstəvilərinə perpendikulyar düz xətlər çəkək. Bu düz xətlərin koordinat müstəviləri ilə kəsişmə nöqtələrindən isə koordinat oxlarına perpendikulyarlar çəkək və onların koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini,uyğun olaraq, A_x, A_y və A_z ilə işarə edək. $\vec{a}$ vektorunun Ox, Oy və Oz koordinat oxlarına proeksiyaları olan $\overline{OA_x}$, $\overline{OA_y}$ və $\overline{OA_z}$ parçalarını almış olarıq: $\overline{OA_x} = pr_{\overline{Ox}}\vec{a}$, $\overline{OA_y} = pr_{\overline{Oy}}\vec{a}$ və $\overline{OA_z} = pr_{\overline{Oz}}\vec{a}$.



Şəkil 20

$\vec{a}$ vektorunun koordinat oxlarına proeksiyaları, vektorun koordinatları adlanır və uyğun olaraq X, Y və Z kimi işarə olunurlar: $X = pr_{\overline{Ox}}\vec{a} = \overline{OA_x}$, $Y = pr_{\overline{Oy}}\vec{a} = \overline{OA_y}$, $Z = pr_{\overline{Oz}}\vec{a} = \overline{OA_z}$. $\vec{a}$ vektorunun koordinatlarının uyğun olaraq X, Y və Z olması faktı $\vec{a} = \{X;Y;Z\}$ kimi yazılır. Paralepipedin $\overrightarrow{OA}$ dioqonalının kvadratı, onun üç $\overline{OA_x}, \overline{OA_y}$ və $\overline{OA_z}$ ölçülərinin kvadratları cəminə bərabər olduğundan,

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = \left|\overline{OA_x}\right|^2 + \left|\overline{OA_y}\right|^2 + \left|\overline{OA_z}\right|^2,$$

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, X = \overline{OA_x}, Y = \overline{OA_y}, Z = \overline{OA_z}$ bərabərliklərini də nəzərə aldıqda isə vektorun uzunluğunun onun ölçüləri ilə ifadəsi olan

$$|\vec{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

və ya

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{11}$$

düsturunu almış olarıq.

Vektorun koordinat oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqların kosinusları, bu vektorun ***yönəldici kosinusları*** adlanırlar. $\vec{a}$ vektorunnun Ox, Oy və Oz koordinat oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqları, uyğun olaraq α, β və γ ilə işarə etsək, bu bucaqların kosinusları üçün

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA_x}}{\left|\overline{OA}\right|} = \frac{X}{|\vec{a}|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{\overline{OA_y}}{\left|\overline{OA}\right|} = \frac{Y}{|\vec{a}|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{\overline{OA_z}}{\left|\overline{OA}\right|} = \frac{Z}{|\vec{a}|} \tag{12}$$

və ya

$$X = |\vec{a}|\cos\alpha \quad , \quad Y = |\vec{a}|\cos\beta \quad , \quad Z = |\vec{a}|\cos\gamma \tag{13}$$

düsturlarını almış olarıq.(12) münasibətlərinin hər tərəflərini kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplasaq və $|\vec{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ bərabərliyini nəzərə alsaq, vektorun yönəldici kosinusları üçün

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{Y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{Z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} \equiv 1 \tag{14}$$

bərabərliyini alırıq. Deməli vektorun yönəldici kosinuslarının kvadratları cəmi vahidə bərabər olmalıdır.

Vektorun bazis vektorlar üzrə ayrılışı.

Fərz edək ki, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ vektorları verilmişdir.

Tərif 7. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ vektorlarından $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sabitlərinin köməyi ilə düzəldilmiş

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n \tag{15}$$

ifadəsi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ vektorlarının ***xətti kombinasiyası*** adlanır.

Tərif 8. Əgər

$$C_1 \vec{e}_1 + C_2 \vec{e}_2 + \cdots + C_n \vec{e}_n = \vec{0}, \tag{16}$$

bərabərliyi $C_1, C_2, \cdots, C_n$ sabitlərinin heç olmazsa birinin sıfırdan fərqli qiymətində ödənirsə, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ vektorları ***xətti asılı vektorlar***, əks təqdirdə, yəni (16) bərabərliyi sabitlərin yalnız $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ qiymətlərində ödəndikdə isə, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ vektorları ***xətti asılı olmayan vektorlar*** adlanırlar.

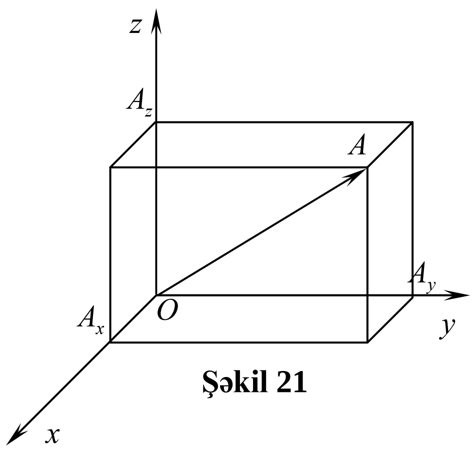
Tərif 9. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ vektorları xətti asılı deyillərsə və istənilən digər $\vec{a}$ vektoru bu vektorlar vasitəsi ilə

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n \tag{17}$$

şəkildə xətti ifadə olunursa, onda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ vektorları ***bazis vektorlar*** adlanırlar.

(17) bərabərliyi $\vec{a}$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ bazis vektorları üzrə ayrılışı, bu ayrılışdakı $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ədədləri isə, $\vec{a}$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ bazis vektorlarında koordinatları adlanır.

Fəzada $Oxyz$ düzbucaqlı koordinat sistemi götürək və Ox, Oy və Oz koordinat oxları üzərində istiqamətləri koordinat oxlarının istiqamətləri ilə eyni, uzunluqları isə 1 -ə bərabər olan $\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ vektorları ayıraq. $\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ vektorları bazis vektorlar əmələ gətirirlər.



Şəkil 21

Əgər hər hansı bir $\vec{a}$ vektoru götürsək və bu vektorun koordinat oxlarına proeksiyalarına baxsaq, $pr_{\overline{Ox}}\vec{a} = \overline{OA_x} = X \cdot \vec{i}$, $pr_{\overline{Oy}}\vec{a} = \overline{OA_y} = Y \cdot \vec{j}$ və $pr_{\overline{Oz}}\vec{a} = \overline{OA_z} = Z \cdot \vec{k}$ alarıq. Alınmış bu qiymətləri $\vec{a} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$ bərabərliyində nəzərə alsaq $\vec{a}$ vektorunun $\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ bazis vektorları üzrə ayrılışı olan

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \tag{18}$$

bərabərliyini alarıq.Bu ayrılış yeganədir.Belə ki, $\vec{a}$ vektorunun $\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ bazis vektorları üzrə (18) şəklində iki müxtəlif

$$\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$$

və

$$\vec{a} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$$

ayrılışları varsa, onları tərəf-tərəfə çıxdıqda

$$(X_1 - X_2)\vec{i} + (Y_1 - Y_2)\vec{j} + (Z_1 - Z_2)\vec{k} = \vec{0}$$

münasibəti alarıq ki, bu münasibət də, $\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ vektorları xətti asılı olmadıqlarından, yalnız $X_1 - X_2 = 0$, $Y_1 - Y_2 = 0$ və $Z_1 - Z_2 = 0$ qiymətlərində, yəni $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ və $Z_1 = Z_2$ olduqda ödənəcək.

$\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ bazis vektorlarının uzunluqları 1-ə bərabər olduqlarından, bu vektorların öz-özlərinə skalyar hasilləri üçün

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{i}^{\,2} = |\vec{i}|^2 = 1 \ , \ \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{j}^{\,2} = |\vec{j}|^2 = 1 \ . \ \vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{k}^{\,2} = |\vec{k}|^2 = 1, \tag{19}$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ bazis vektorları qarşılıqlı perpendikulyar olduqlarından isə, onların bir-birinə skalyar hasilləri üçün isə

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \ , \ \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \ , \ \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 \tag{20}$$

bərabərlikləri alırıq.

Skalyar hasilin vektorların koordinatları ilə ifadəsi.

Fərz edək ki, fəzada $Oxyz$ düzbucaqlı koordinat sistemi $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ və $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ vektorları verilmişdir. Onda bu vektorların $\vec{i}$, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ bazis vektorları üzrə ayrılışları, müvafiq olaraq

$$\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k} \tag{21}$$

və

$$\vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k} \tag{22}$$

şəklində olacaq. Skalyar hasilin xassələrindən istifadə edərək, bu vektorların skalyar hasilini hesablasaq

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}\right)\left(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}\right)=X_1X_2\vec{i}\cdot\vec{i}+X_1Y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+X_1Z_2\vec{i}\cdot\vec{k}+$$
$$+Y_1X_2\vec{j}\cdot\vec{i}+Y_1Y_2\vec{j}\cdot\vec{j}+Y_1Z_2\vec{j}\cdot\vec{k}+Z_1X_2\vec{k}\cdot\vec{i}+Z_1Y_2\vec{k}\cdot\vec{j}+Z_1Z_2\vec{k}\cdot\vec{k}\quad ,$$

münasibətini, (19) və (20) bərabərliklərini də nəzərə aldıqda isə sonuncudan

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 \tag{23}$$

münasibətini alırıq. (23) münasibəti koordinatları ilə verilmiş $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ və $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ vektorlarının skalyar hasilinin vektorların koordinatları ilə ifadəsi düsturu adlanır.

İki vektor arasında qalan bucaq.

İki vektorun parallellik və perpendikulyarlıq şərtləri.

Fərz edək ki, $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ və $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ vektorları verilmişdir.Bu vektorların skalyar hasili üçün $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ düsturundan, bu iki vektor arasında qalan φ bucağının kosinusu üçün

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\quad ,$$

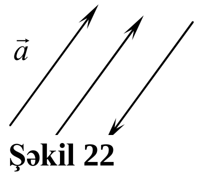
münasibətini, bu vektorlanın uzunluqlarının koordinatlarla $|\vec{a}|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}$ ifadələrini, və skalyar hasilinin isə koordinatlarla $\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$ ifadəsini də nəzərə alsaq

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} \tag{24}$$

münasibətini alarıq.

(24) münasibəti koordinatları iləverilmiş $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ və $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ vektorları arasında qalan φ bucağının kosinusunun vektorların koordinatları ilə ifadəsi düsturu adlanır.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları paralleldirlərsə, onda onlar kolineardırlar, yəni elə $\lambda\neq 0$ ədədi var ki, $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ münasibəti ödənir.Bu münasibəti vektorların koordinatları ilə ifadə etsək,



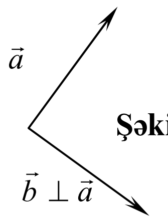
Şəkil 22

$X_1 = \lambda X_2, Y_1 = \lambda Y_2, Z_1 = \lambda Z_2$ bərabərlikləri, bu münasibətlərdən λ ədədini yox etdikdə isə

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad (25)$$

münasibətini alırıq. (25) münasibəti koordinatları ilə verilmiş iki vektorun parallellik şərti adlanır.bu münasibətdən göründüyü kimi, ***iki vektorun parallel olması üçün onların uyğun koordinatları mütənasib olmalıdır***.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları perpendikulyardırlarsa, onda onların skalyar hasili $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ şərtini ödəyir. Skalyar hasilinin vektorların koordinatları ilə ifadəsi olan (25) düsturunu nəzərə alsaq, sonuncu münasibətdən



Şəkil 23

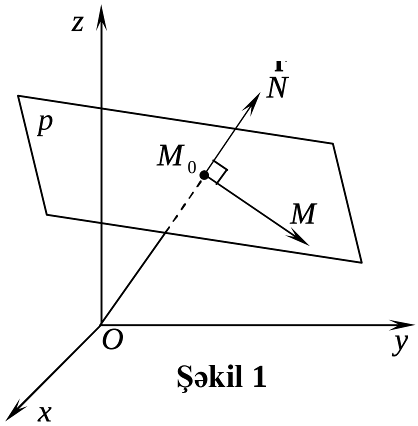
$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0 \qquad (26)$$

bərabərliyi alınır. (26) münasibəti koordinatları ilə verilmiş iki vektorun perpendikulyarlıq şərti adlanır.

FƏZADA ANALİTİK HƏNDƏSƏ

Fəzada müstəvinin ümumi tənliyi

Fəzada $Oxyz$ düzbucaqlı koordinat sistemi və hər hansı p müstəvisi götürək. Koordinat başlanğıcından p müstəvisinə perpendikulyar $\vec{N} = \{A; B; C\}$ vektoru keçirək və bu vektoru p müstəvisinin ***normal vektoru*** (və ya qısaca ***normalı***) adlandıraq.Tutaq ki,bu normal vektor$p$ müstəvisini $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsində kəsir. Normal vek-toru $\vec{N} = \{A; B; C\}$ olan və $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsindən keçən p müstəvisinin tənliyini çıxaraq.



Şəkil 1

Fəzada cari koordinatları $(x; y; z)$ olan ixtyari bir M nöqtəsi götürək və M_0 nöqəsini M nöqtəsinə düz xətt parçası vasitəsi ilə birləşdirsək, $\overrightarrow{M_0M}$ vektoru alarıq. M nöqtəsi yalnız və yalnız o halda p müstəvisi üzərində olacaq ki, $\overrightarrow{M_0M}$ vektoru $\vec{N}$ vektoruna perpendikulyar olsun. Sıfırdan fərqli bu iki vektorun perpendikulyarlığı üçün isə onların skalyar hasili sıfıra bərabər olmalıdır. Odur ki,

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \tag{1}$$

münasibəti alırıq.

$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ və $\vec{N} = \{A; B; C\}$ qiymətlərini nəzərə alıb (1) bərabərliyini koordinatlarla yazsaq,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

münasibətini alırıq.(2) tənliyi normal vektoru $\vec{N} = \{A; B; C\}$ olan və $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsindən keçən müstəvinin tənliyi adlanır.Bu tənliyi

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

şəklində yazıb $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ işarə etsək,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

tənliyi alınar. (3) tənliyi normal vektor $\overset{\mathbf{r}}{N} = \{A; B; C\}$ olan ***müstəvinin ümumi tənliyi*** adlanır.

İki müstəvi arasında qalan bucaq. İki müstəvinin paralellik və perpendikulyarlıq şərti

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{1}$$

və

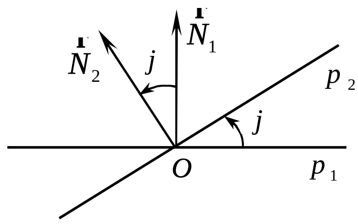
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{2}$$

şəklində verilmiş p_1 və p_2 müstəviləri verilmişdir. Onda onların normalları, uyğun olaraq

$$\overset{\mathbf{r}}{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\} \tag{3}$$

və

$$\overset{\mathbf{r}}{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\} \tag{4}$$



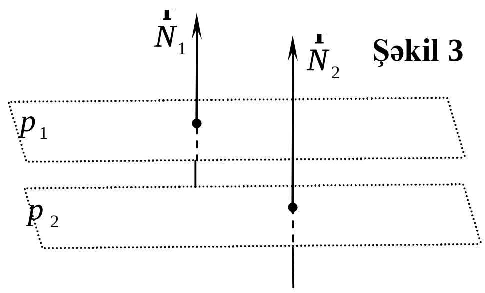
Şəkil 2

vektorları olacaq.

Şəkildən də göründüyü kimi, p_1 və p_2 müstəvisi arasında qalan j bucağı bu müstəvilərin $\overset{\mathbf{r}}{N}_1$ və $\overset{\mathbf{r}}{N}_2$ normal vektorları arasında qalan bucağa bərabərdir. Bu iki vektor arasında qalan bucaq isə

$$\cos j = \frac{\overset{\mathbf{r}}{N}_1 \cdot \overset{\mathbf{r}}{N}_2}{\left|\overset{\mathbf{r}}{N}_1\right| \cdot \left|\overset{\mathbf{r}}{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{5}$$

bərabərliyi ilə müəyyən olunduğundan, (5) düstüru, həm də, tənlikləri,uyğun olaraq (1) və (2) şəklində verilmiş iki müstəvi arasında qalan bucağın tapılması düsturudur.



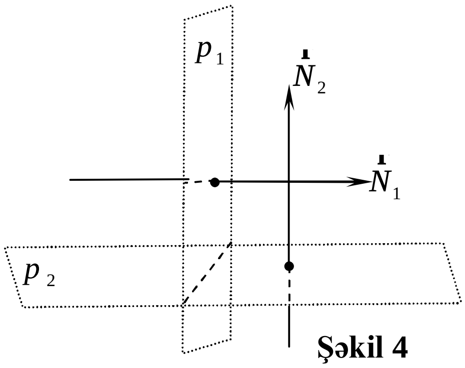
Şəkil 3

Əgər p_1 və p_2 müstəviləri paralleldirlərsə, onda onların $\overset{\mathbf{r}}{N}_1$ və $\overset{\mathbf{r}}{N}_2$ normalları kolinear olacaq və iki vektorun kolinearlıq şərtinə əsçasən isə

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{6}$$

münasibəti ödənməlidir. (6) şərti tənliyi (1) və (2) şəklində verilmiş p_1 və p_2 müstəvilərinin ***paralellik*** şərti adlanır.

Əgər p_1 və p_2 perpendikulyardırsa, onda $\vec{N}_1$ və $\vec{N}_2$ normalları da perpendikulyar olacaq. İki vektorun perpendikulyarlıq şərtinə əsasən $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$ münasibəti ödənməlidir. Bu münasibəti koordinatlarla ifadə etdikdə



Şəkil 4

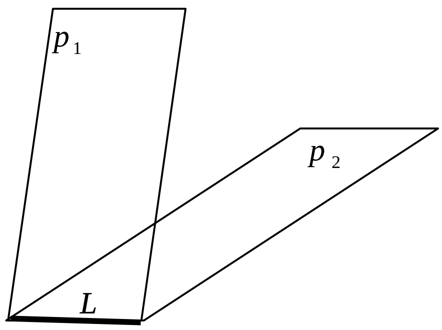
$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (7)$$

bərabərliyi alınar.(7) şərti tənlikləri,uyğun olaraq (1) və (2) şəklində verilmiş p_1 və p_2 müstəvilərinin ***perpendikulyarlıq*** şərti adlanır.

Fəzada düz xətt tənlikləri

Parallel olmayan iki müstəvi həmişə bir düz xətt boyunca kəsişdiyindən fəzada istənilən düz xəttə iki müstəvinin kəsişmə xətti kimi baxmaq olar.Əgər fəzada hər hansı L düz xətti ümumi tənlikləri,uyğun olaraq (1) və (2) şəklində verilmiş p_1 və p_2 müstəvilərinin kəsişmə xəttidirsə, onda bu xəttin tənliyini

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

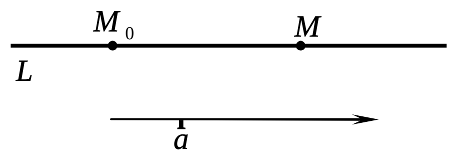


Şəkil 5

şəklində yazmaq olar.Belə ki, fəzada L düz xətti üzərində yerləşən ixtiyari $M(x;y;z)$ nöqtəsi həm p_1, həm də p_2 müstəvisinin üzərində yerləşir, deməli bu nöqtənin koordinatları verilmiş müstəvilərin uyğun (1) və (2) tənliklərini, eləcə də bu tənliklərdən düzəldilmiş (8) sistemini ödəməlidirlər. (8) tənlikləri fəzada L düz xəttinin ***ümumi tənliyi*** adlanır. Lakin bu tənlik praktiki məsələlərin həlli üçün bir o qədər də əlverişli olmadığından, fəzada düz xətlərin digər şəkildə tənliklərini də öyrənək.

Fəzada düz xəttin kanonik tənliyi

Tutaq ki, fəzada L düz xətti verilib və $M_0(x_0;y_0;z_0)$ bu düz xətt üzərində yarləşən hər hansı bir nöqtədir. L düz xəttinə parallel $\vec{a}=\{m;n;l\}$ vektoru götürək və bu vektoru L düz xəttinin ***istiqamətverici vektoru*** adlandıraq.



Şəkil 6

Fəzada cari koordinatları $(x;y;z)$ olan ixtyari bir M nöqtəsi götürək və M_0 nöqəsini M nöqəsinə düz xətt parçası vasitəsi ilə birləşdirsək, $\overrightarrow{M_0M}$ vektoru alarıq. M nöqtəsi yalnız və yalnız o zaman L düz xətti üzərində yerləşəcək ki, $\overrightarrow{M_0M}$ vektoru $\vec{a}$ vektoruna parallel olsun.

$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ və $\vec{a}=\{m;n;l\}$ olduğundan, iki vektorun parallellik şərtinə əsasən,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l} \qquad (9)$$

münasibətini alırıq. (9) tənliyi fəzada L düz xəttinin ***kanonik tənliyi*** adlanır.

Ədər fəzada L düz xəttinin tənliyi ümumi (8) şəklində verilmişsə, onu kanonik (1) şəklinə gətirmək üçün L düz xəttinin istiqamətverici vektorunun m, n və l koordinatlarını

$$m=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad n=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \quad l=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \qquad (10)$$

kimi, M_0 nöqtəsinin x_0, y_0, z_0 koordinatlarını isə (8) sistemini ödəyən istənilən həll kimi, xüsusi halda, (8) sisteminində z dəyişəninə ixtiyari z_0 qiyməti verərək, qalan iki x və y dəyişəninin qiymətlərini bu sistemdə $z=z_0$ yazdıqdan sonra alınan ikiməchullu iki xətti cəbri

$$\begin{cases} Ax_1+B_1y+C_1z_0+D_1=0; \\ Ax_2+B_2y+C_2z_0+D_2=0 \end{cases}$$

tənliklər sisteminin həlli kimi götürmək olar.

Fəzada düz xəttin parametrik tənliyi.

Fəzada L düz xəttin kanonik (9) tənliyində

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}=t \qquad (11)$$

qəbul etməklə

$$\begin{cases} x-x_0=mt; \\ y-y_0=nt; \\ z-z_0=lt, \end{cases}$$

buradan isə

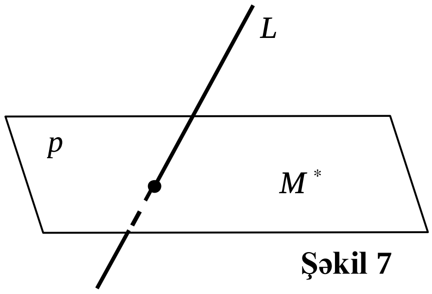
$$\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt; \\ z=z_0+lt \end{cases} \qquad (12)$$

tənliklərini alırıq ki, bu tənliklər fəzada L düz xəttinin parametrik tənlikləri adlanır.

Fəzada düz xəttin parametrik tənliklərindən düz xəttlə müstəvinin kəsişmə nöqtəsinin tapılmasında istifadə edilir. Əgər fəzada parametrik tənliklərinin (12) şəklində verildiyi L düz xətti ilə, tənliyi ümumi

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (13)$$

p müstəvisinin kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarının tapılması tələb olunursa, (12) bərabərliklərinin (13) tənliyində nəzərə alsaq



Şəkil 7

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+lt)+D=0$$

t parametrinə nəzərən quplaşma apardıqdan sonra isə

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+(Am+Bn+Cl)t=0$$

bərabərliyini almış olarıq.Bu bərabərliyi ödəyən

$$t=t^*=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cl} \qquad (14)$$

qiymətini (12) bərabərliyində nəzərə alsaq, L düz xətti ilə p müstəvisinin kəsişmə nöqtəsi olan M^* nöqtəsinin $(x^*;y^*;z^*)$ koordinatlarını

$$\begin{cases} x^*=x_0+mt^*; \\ y^*=y_0+nt^*; \\ z^*=z_0+lt^* \end{cases} \qquad (15)$$

bərabərlikləri ilə tapa bilərik.

Fəzada düz xəttlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti.

Tutaq ki, fəzada tənliyi kanonik

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l} \qquad (16)$$

şəklində verilmiş L düz xətti və tənliyi ümumi şəkildə verilmiş

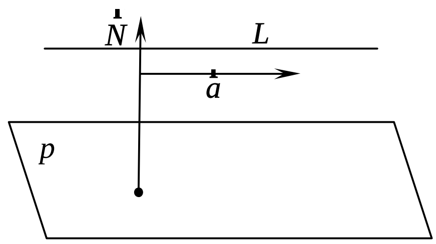
$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (17)$$

p müstəvisi verilmişdir. $\vec{a}=\{m;n;l\}$ vektoru L düz xəttinin istiqamətverici vektoru, $\vec{N}=\{A;B;C\}$ vektoru isə p müstəvisinin isə normalıdır.

L düz xətti ilə p müstəvisi aşağıdakı qarşılıqlı vəziyyətlərdə ola bilər.

1. L düz xətti p müstəvisinə paralel ola bilər: $L//p$.

Bu halda L düz xəttinin $\vec{a}=\{m;n;l\}$ istiqamətverici vektoru p müstəvisinin $\vec{N}=\{A;B;C\}$ normalına perpendikulyar olacaq.Bu vektorların perpendikulyarlıq şərtinə əsasən, onların



Şəkil 8

$$\vec{N}\cdot\vec{a}=0 \qquad (18)$$

skalyar hasili sıfra bərabər olacaq. Vektorların skalyar hasilin koordinatlarla ifadə düsturuna əsasən, sonuncu bərabərliklən isə

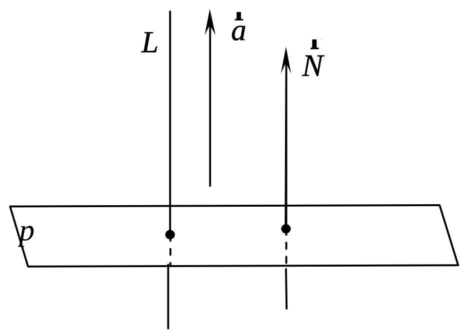
$$Am+Bn+Cl=0 \qquad (19)$$

münasibətini alırıq.

(19) şərti tənliyi (16) şəklində verilmiş L düz xəttinin tənliyi (17) şəklində verilmiş p müstəvisinə parallellik şərti adlanır.

2. L düz xətti p müstəvisinə perpendikulyar ola bilər: $L\perp p$.

Bu halda L düz xəttinin $\vec{a}$ istiqamətverici vektoru, p müstəvisinin $\vec{N}$ normalına parallel olacaq. İki vektorun parallellik şərtinə əsasən, onların uyğun koordinatları mütənasib olmalıdır:



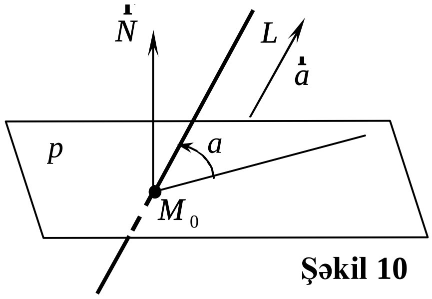
Şəkil 9

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{l} \qquad (20)$$

(20) şərti tənliyi (16) şəklində verilmiş L düz xəttinin tənliyi (17) şəklində verilmiş p müstəvisinə perpendikulyarlıq şərti adlanır.

3. L düz xətti p müstəvisini müəyyən bucaq altında kəsə bilər.

Bu halda L düz xətti p müstəvisi ilə a bucağı əmələ gətirir (düz xəttin müstəvi ilə əmələ gətirdiyi bucaq dedikdə, bu düz xəttin p müstəvisindəki öz proeksiyası ilə arasında qalan bucaq başa düşülür).



Şəkil 10

Şəkildən göründüyü kimi a bucağı düz xəttin istiqamətverici vektorunun müstəvinin $\vec{N}$ normal vektoruna proekesiyası arasında qalan j -bucağının cəmi 90°-yə bərabərdir: $a+j=90^\circ$.Buradan

$$a=90^\circ-j\ ,$$

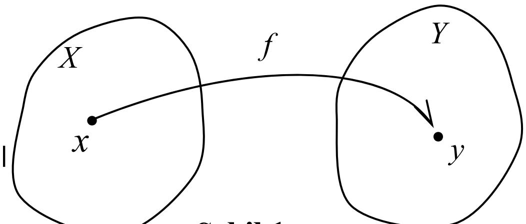
harada ki,

$$\cos j=\frac{\vec{N}\cdot\vec{a}\cdot}{|\vec{N}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{Am+Bn+Cl}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+l^2}} \qquad (21)$$

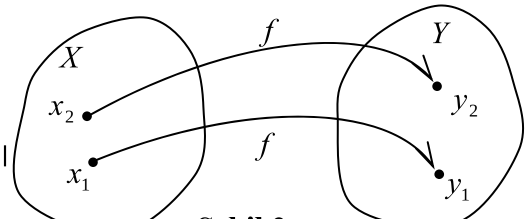
alırıq.

§1. Funksiya anlayışı. Funksiyanın qrafiki. Funksiyanın verilməsi üsulları

Fərz edək ki, hər hansı $X=\{x\}$ və $Y=\{y\}$ çoxluqları verilmişdir. X çoxluğunun hər bir x elementinə qarşı, Y çoxluğundan yeganə y elementini qarşı qoyan f qaydası X çoxluğunda təyin olunmuş funksiya adlanır və $y=f(x)$ kimi yazılır. Burada x dəyişəninin X çoxluğundan aldığı qiymətlər üzərinə məhdudiyyət qoyulmadığından, yəni bu qiymətlər sərbəst alındığından, x dəyişəni ***sərbəst dəyişən və ya arqument*** adlanır. y dəyişəninin aldığı qiymətlər isə x dəyişəninin aldığı qiymətlərdən asılı olduğundan, bu dəyişən ***asılı dəyişən və ya funksiya*** adlanır. X çoxluğu $y=f(x)$ funksiyasının ***təyin oblastı***, Y çoxluğu isə onun ***qiymətlər oblastı*** və ya ***qiymətlər çoxluğu*** adlanır. Əgər $y=f(x)$ funksiyası sərbəst dəyişənin iki müxtəlif $x_1 \neq x_2$ qiymətlərinə asılı dəyişənin də iki müxtəlif $y_1 \neq y_2$ qiymətlərini qarşı qoyursa, bu funksiya ***qarşılıqlı birqiymətli funksiya*** adlanır.

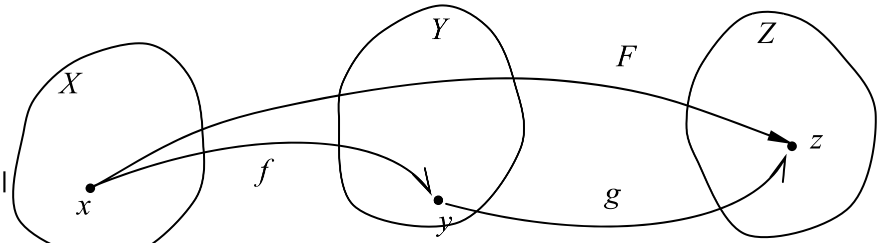


Şəkil 1



Şəkil 2

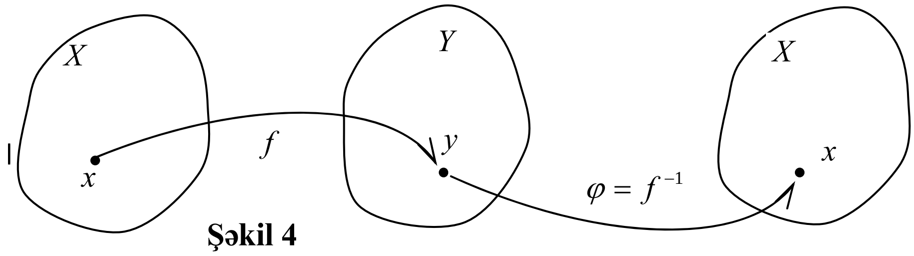
Tutaq ki, X, Y və Z çoxluqları verilib. $y=f(x)$ funksiyası X çoxluğunun hər bir x elementinə qarşı, Y çoxluğundan yeganə y elementini, $z=g(y)$ funksiyası isə Y çoxluğunun hər bir y elementinə qarşı, Z çoxluğundan yeganə z elementini qarşı qoyan funksiyalardır. Onda X çoxluğunun hər bir x elementinə qarşı Z çoxluğundan yeganə z elementini qarşı qoyan $z=g(f(x))=F(x)$ funksiyası mövcuddur. $z=g(f(x))=F(x)$ funksiyası X çoxluğunda təyin olunmuş ***mürəkkəb funksiya*** adlanır. Bəzən mürəkkəb $z=F(x)$ funksiyasını verilmiş g və f funksiyalarının superpozisiyası adlandıraraq, $F=g\circ f$ şəkildə işarə edirlər. Yuxarıdakı



Şəkil 3

qayda ilə təyin olunmuş mürəkkəb funksiyada y dəyişəni ***aralıq dəyişən*** adlanır. Analoji qayda ilə bir deyil, bir neçə aralıq dəyişənin iştirak etdiyi mürəkkəb funksiyaya da tərif vermək olar.

Tutaq ki, X və Y çoxluqları verilmişdir. X çoxluğunda təyin olunmuş qarşılıqlı birqiymətli $y = f(x)$ funksiyasına baxaq. Qarşılıqlı birqiymətli bu $y = f(x)$ funksiyası X çoxluğunun hər bir x elementinə Y çoxluğunun yeganə y elementini qarşı qoyur və Y çoxluğundan olan hər bir y elementininin özünün qarşı qoyulduğu x elementi yeganədir. Deməli, Y çoxluğunun olan hər bir y elementinə qaşı, onun özünün X çoxluğundan qaşı qoyulduğu yeganə x elementini qarşı qoyan φ qaydası mövcuddur ki, Y çoxluğunda təyin olunmuş bu $x = \varphi(y)$ funksiyası, verilmiş $y = f(x)$ funksiyasının ***tərs funksiyası*** adlanır və adətən f^{-1} kimi işarə olunur.

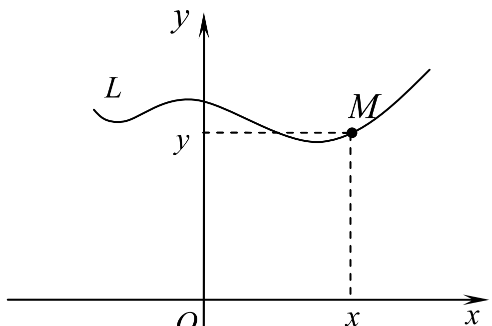


Şəkil 4

Tərifdən də göründüyü kimi, yalnız qarşılıqlı birqiymətli funksiyanın tərsindən danışmaq olar.

Müstəvi üzərində, x absisləri ilə y ordinatları arasında $y = f(x)$ müasibətinin ödəndiyi bütün $M(x; y)$ nöqtələri çoxluğu $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki adlanır və qr$f$ kimi işarə olunur:

$$\text{qr}f = \{M(x; y) : y = f(x)\}.$$



Şəkil 5

Funksiyalar, adətən üç üsulla verilirlər:

1.Sərbəst dəyinənlə asılı dəyişən arasında münasibətin verildiyi ***analitik üsul***;

2. Sərbəst dəyinənin ayrı-ayrı qiymətləri ilə asılı dəyişənin onlara uyğun qiymətlərinin cədvəl şəkilində verildiyi ***cədvəl üsulu***;

3.Funksiyanın qrafiki olan əyrinin verildiyi ***qrafik üsul***.

Funksiyanın verilməsinin **analitik üsulu** özü də iki növə ayrılır:

a) Asılı dəyişənin y qiymətinin sərbəst dəyişənin onun qarşı qoyulduğu x qiyməti arasında alqoritmin aşkar $y = f(x)$ şəkildə verildiyi ***aşkar analitik üsul;***

b) Sərbəst x dəyinəni ilə asılı y dəyişəni arasında $F(x;y)=0$ münasibətin verildiyi ***qeyri aşkar analitik üsul.***

Funksiyanın verilməsinin ***cədvəl üsulunda*** sərbəst x dəyinənin ayrı-ayrı $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qiymətləri ilə asılı dəyişənin onlara uyğun $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $,\cdots, y_n = f(x_n)$ qiymətləri cədvəli şəkilində verilirlər. Həndəsi olaraq, verilmiş funksianın qrafikinin Oxy koordinat müstəvisinin $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2), \cdots, M_2(x_2;y_2)$ nöqələrindən keçdiyini nümayiş etdirən bu üsuldan, adətən, eksperimental sahələrdə geniş istifadə olunur.

x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Şəkil 6

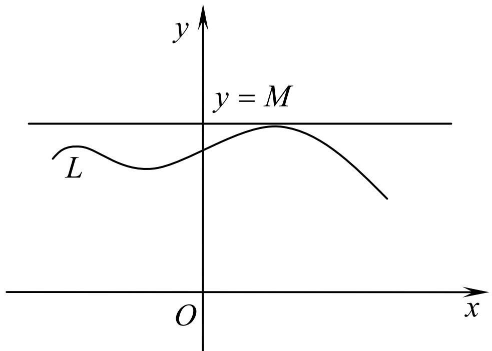
Verilmiş funksianın Oxy koordinat müstəvisində qrafiki olan L xəttinin verilməsindən ibarət olan ***qrafik üsul*** vasitəsilə sərbəst dəyişəninin istənilən x qiymətinə qarşı funksiyanın ona uyğun $y = f(x)$ qiymətini tapmağın mümkünlüyündən əlavə, bu üsulla verilən funksiyaların artma və azalma intervalları, qabarıq və çöküklüyü, lokal ekstremumları, əyilmə nöqtələri və s. xarakteristikaları qrafikdən əyani olaraq görünürlər.

§2. Funksiyaların ümumi xarakteristikaları: məhdudluğu, monotonluğu, tək və cütlüyü, dövriliyi

Funksiyanın məhdudluğu. Fərz edək ki, hər hansı X çoxluğunda təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir.

Tərif 1. X çoxluğundan olan ixiyari x qiyməti üçün $f(x) \le M$ şərtini ödəyən sonlu M ədədi varsa $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda ***yuxarıdan məhdud*** funksiya, M ədədi isə $f(x)$ funksiyasının X çoxluğunda ***yuxarı sərhəddi*** adlanır: $\exists M \ \ \forall x \in X \ \ f(x) \le M$.

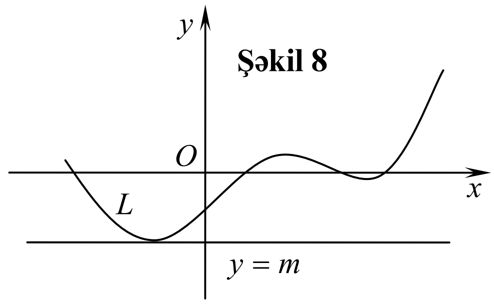
$f(x)$ **funksiyanın** X **çoxluğunda yuxarıdan məhdudluğu**, həndəsi olaraq, absisləri X çoxluğundan olan qiymətlərdə $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin $y = M$ düz xəttindən yuxarıda yerləşmədiyini göstərir (şəkil 7).



Şəkil 7

Tərif 2. X çoxluğundan olan ixiyari x qiyməti üçün $f(x) \geq m$ şərtini ödəyən sonlu m ədədi varsa $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda ***aşağıdan məhdud*** funksiya, m ədədi isə $f(x)$ funksiyasının X çoxluğunda ***aşağı sərhəddi*** adlanır: $\exists m \ \ \forall x \in X \ \ f(x) \geq m$.

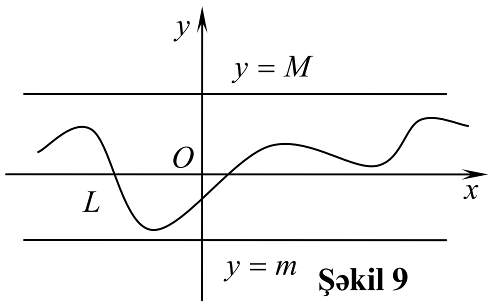
$f(x)$ **funksiyanın** X **çoxluğunda aşağıdan məhdudluğu**, həndəsi olaraq, absisləri X çoxluğundan olan qiymətlərdə $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin $y = m$ düz xəttindən aşağıda yerləşmədiyini göstərir (şəkil 8).



Şəkil 8

Tərif 3. X çoxluğunda eyni zamanda həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhdud olan $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda ***məhdud*** funksiya adlanır. Başqa sözlə, X çoxluğundan olan ixiyari x qiyməti üçün $m \leq f(x) \leq M$ şərtini ödəyən sonlu m və M ədədləri varsa, $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda ***məhdud*** funksiya adlanır: $\exists m, M \ \ \forall x \in X \ \ m \leq f(x) \leq M$.

$f(x)$ **funksiyanın** X **çoxluğunda məhdudluğu**, həndəsi olaraq, absisləri X çoxluğundan olan qiymətlərdə $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin $y = m$ və $y = M$ düz xətləri arasında yerləşdiyini göstərir (şəkil 9).



Şəkil 9

Funksiyanın yuxarı (aşağı) sərhədlərinin ən kiçiyi (böyüyü) funksiyanın dəqiq yuxarı (aşağı) sərhədi adlanır və $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ ($\inf\limits_{x \in X} f(x)$) kimi işarə olunur.

$M = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ ədədi

1. $\forall x \in X \quad f(x) \leq M$;

2. $\forall\varepsilon > 0 \ \exists x' \in X \ \ f(x') > M - \varepsilon$

şərtlərini, $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ ədədi isə

1. $\forall x \in X \quad f(x) \geq m$;

2. $\forall\varepsilon > 0 \ \exists x'' \in X \ \ f(x'') < m + \varepsilon$

şərtlərini ödəyirlər.

Funksiyanın təkliyi və cütlüyü. Tərif 4. İxtiyari $x \in X$ qiymətində $(-x) \in X$ olarsa, X çoxluğu 0 nöqəsinə nəzərən ***simmetrik çoxluq*** adlanır.

Başqa sözlə, X çoxluğun hər elementi bu çoxluğa öz əks elementi ilə birgə daxil olarsa, X çoxluğu 0 nöqəsinə nəzərən ***simmetrik çoxluq*** adlanır.

Tərif 5. X çoxluğunda təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası o halda X çoxluğunda ***cüt funksiya*** adlanır ki:

1. X çoxluğu 0 nöqəsinə nəzərən simmetrik çoxluq olsun. yəni $\forall x \in X$ qiymətində $(-x) \in X$ şərti ödənsin;

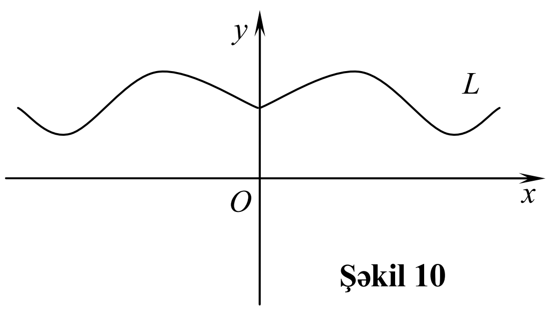
2. $\forall x \in X$ qiymətində $f(-x) = f(x)$ bərabərliyi ödənsin.

Tərif 6. X çoxluğunda təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası o halda X çoxluğunda ***tək funksiya*** adlanır ki:

1. X çoxluğu 0 nöqəsinə nəzərən simmetrik çoxluq olsun. yəni $\forall x \in X$ qiymətində $(-x) \in X$ şərti ödənsin;

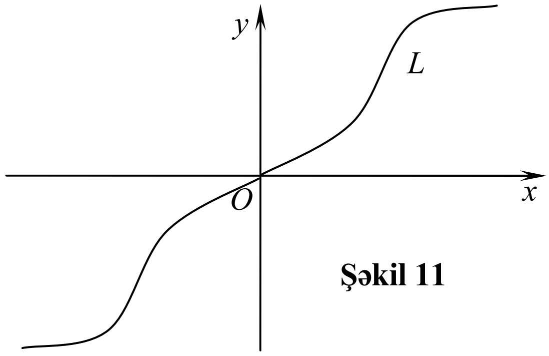
2. $\forall x \in X$ qiymətində $f(-x) = -f(x)$ bərabərliyi ödənsin.

Cüt funksiyanın tərifindən də görünür ki, əgər Oxy koordinat müstəvisinin hər hansı $M(x; y)$ nöqtəsi cüt funksiyanın qrafiki üzərindədirsə, $M'(-x; y)$ nöqtəsi də bu funksiyanın qrafiki üzərində olacaq. Bu nöqtələr isə ordinat oxuna nəzərən simmetrik olduğundan, cüt funksiyasının qrafiki ordina oxuna nəzərən simmetrik əyri olacaq (şəkil 10)



Şəkil 10

Tək funksiyanın tərifindən isə görünür ki, Oxy koordinat müstəvisinin hər hansı $M(x;y)$ nöqtəsi tək funksiyanın qrafiki üzərindədirsə, $M''(-x;-y)$ nöqtəsi də bu funksiyanın qrafiki üzərində olacaq. Bu nöqtələr isə koordinant başlanğıcına nəzərən simmetrik olduğundan, tək funksiyanın qrafiki koordinant başlanğıcına nəzərən simmetrik əyri olacaq (şəkil 11).

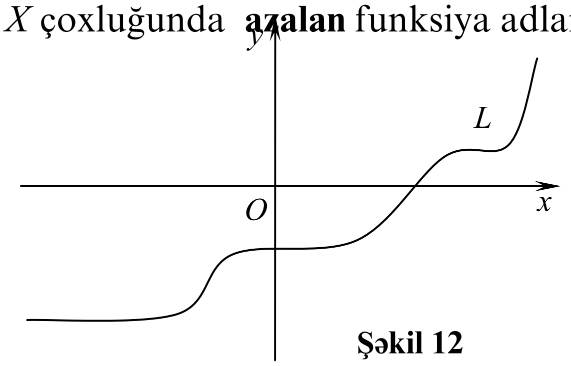


Şəkil 11

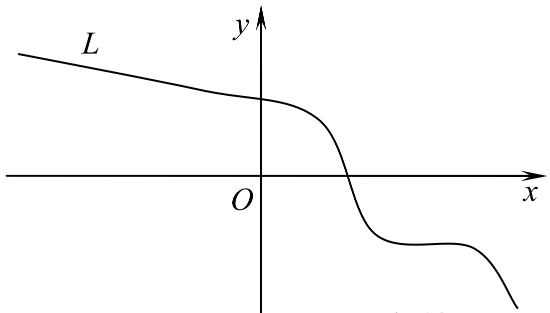
Funksiyanın monotonluğu. Fərz edək ki, X çoxluğunda təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir. X çoxluğundan $x_1 < x_2$ şərtini ödəyən ixtiyari x_1 və x_2 nöqtələri götürək.

Tərif 7. $x_1 < x_2$ şərtini ödəyən ixtiyari $\forall x_1, x_2 \in X$ qiymətləri üçün:

1. $f(x_1) \le f(x_2)$ şərti ödəndikdə $y = f(x)$ funksiyası X çoxluğunda **azalmayan**;
2. $f(x_1) \ge f(x_2)$ şərti ödəndikdə $y = f(x)$ funksiyası X çoxluğunda **artmayan**;
3. $f(x_1) < f(x_2)$ şərti ödəndikdə $y = f(x)$ funksiyası X çoxluğunda **artan**;
4. $f(x_1) > f(x_2)$ şərti ödəndikdə $y = f(x)$ funksiyası X çoxluğunda **azalan** funksiya adlanır.



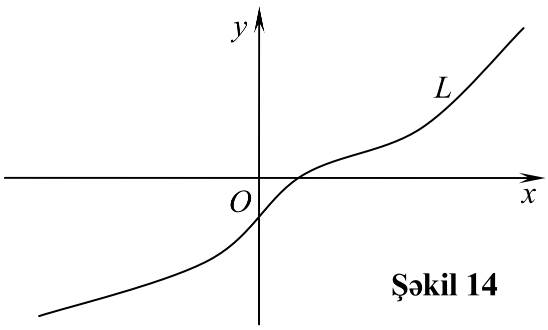
Şəkil 12



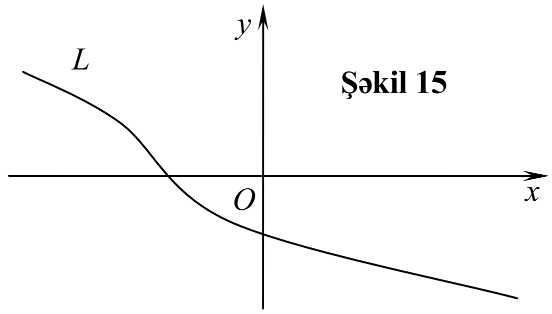
Şəkil 13

azalan funksiya adlanır.

X çoxluğunda ya ***artmayan***, ya da ***azalmayan*** funksiya, bu çoxluqda **monoton** funksiya adlanır (şəkil 12 və 13) ***Artan*** və ***azalan*** funksiyaları onlardan fərqləndirmək üçün bu funksiyaları **ciddi monoton** funksiyalar adlandırırlar (şəkil 14 və 15).



Şəkil 14



Şəkil 15

Funksiyanın dövriliyi. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyasının təyin olunduğu X çoxluğu aşağıdakı şərti ödəyir: elə $T > 0$ ədədi var ki, $\forall x \in X$ elementi üçün $(x+T) \in X$ olacaq. Aydındır ki, bu halda

$x+2T, x+3T, \cdots, x+kT, \cdots$ və $x-T, x-2T, x-3T, \cdots, x-kT, \cdots$

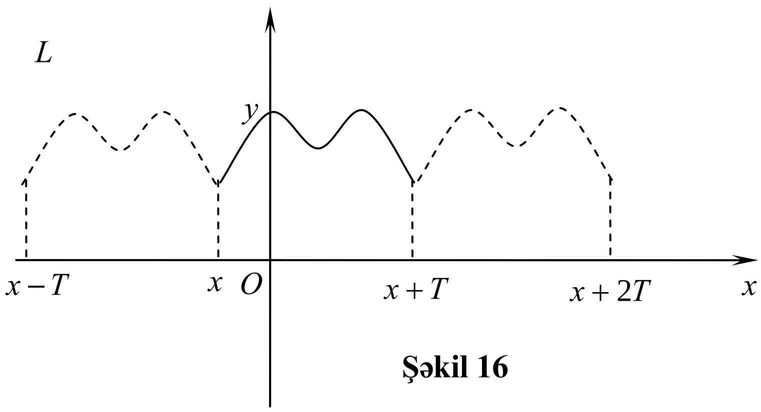
ədədləri də X çoğluğundan olacaq.

Tərif 8. $\forall x \in X$ üçün

$$f(x+T) = f(x) \tag{1}$$

bərabərliyini ödəyən T ədədi varsa, $y = f(x)$ funksiyası X çoxluğunda **dövri funksiya**, (1) bərabərliyini ödəyən ən kiçik T ədədi isə $y = f(x)$ funksiyasının **dövrü** adlanır.

T dövrlü $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki T uzunluqlu ixtiyari $[x; x+T]$ parçasında məlum olduqda, bu funksiyanın bütün oxda qrafiki onun $[x; x+T]$ parçasındakı qrafikinin sağa və sola sürüşdürülməsindən alınır.

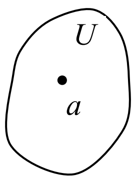


Şəkil 16

§3. Sonsuz kiçilən və sonsuz böyüyən funksiya. Onların əsas xassələri

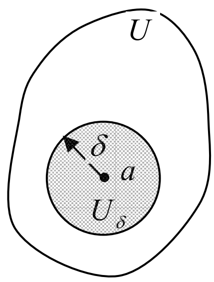
Sonsuz böyüyən və sonsuz kiçilən funksiyalar anlayışlarını daxil etməzdən öncə bəzi köməkçi anlayışları daxi edək.

a nöqtəsini özündə saxlayan ixtiyari çoxluq a nöqtəsinin ***ətrafı*** adlanır. a nöqtəsinin ətrafına daxil olan nöqtələrin a



Şəkil 17

nöqtəsindən məsafəsi δ ədədindən kiçikdirsə, bu ətraf a nöqtəsinin δ ətrafı adlanır və $U_\delta(a)$ kimi işarə olunur: (şəkil 18). $U_\delta(a)=\{x:|x-a|<\delta\}=(a-\delta;\ a+\delta)$. a nöqtəsinin δ ətrafından a nöqtəsinin özünü atdıqdan sonra alınan ətraf $\tilde{U}_\delta(a)$ kimi işarə olunur:



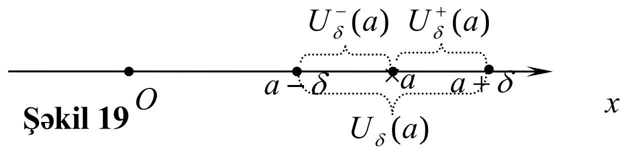
Şəkil 18

$$\tilde{U}_\delta(a)=U_\delta(a)\setminus\{a\}=\{x:0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta;a+\delta)\setminus\{a\}=(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta).$$

$U_\delta^-(a)=\{x<a:|x-a|<\delta\}=(a-\delta;a)$

işarə edib a nöqtəsinin sol δ ətrafı ;

$U_\delta^+(a)=\{x>a:|x-a|<\delta\}=(a;a+\delta)$



Şəkil 19

işarə edib a nöqtəsinin sağ δ ətrafı adlandırsaq,

$$\tilde{U}_\delta(a)=(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)=U_\delta^-(a)\cup U_\delta^+(a)$$

alarıq (şəkil 19).

Tutaq ki, hər hansı X çoxluğu və a nöqtəsi verilib. a nöqtəsinin istənilən ətrafında X çoxluğundan həmişə ən azı bir element varsa, a nöqtəsi X çoxluğunun limit nöqtəsi adlanır.

İndi isə sonsuz böyüyən və sonsuz kiçilən funksiyalar anlayışlarını daxil edək.

Tutaq ki, $\alpha(x)$ funksiyası verilmişdir və a nöqtəsi X çoxluğunun limit nöqtəsidir.

Tərif 9. $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $0<|x-a|<\delta$ münasibətini ödəyən bütün x nöqtələrində $|\alpha(x)|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin, onda $\alpha(x)$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda (və yə $x=a$ nöqtəsində) **sonsuz kiçilən funksiya adlanır**

Tərif 10. $\forall M>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $0<|x-a|<\delta$ münasibətini ödəyən bütün x nöqtələrində $|\alpha(x)|>\mathrm{M}$ bərabərsizliyi ödənsin, onda $\alpha(x)$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda (və yə $x=a$ nöqtəsində) **sonsuz böyüyən funksiya adlanır.**

Teorem 1. Əgər $\alpha(x)$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçiləndirsə və sıfırdan fərqlidirsə, onda $\frac{1}{\alpha(x)}$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz böyüyən funksiyadır. Tərsinə, əgər $\alpha(x)$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz böyüyəndirsə, onda $\frac{1}{\alpha(x)}$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiyadır.

İsbatı. Əgər $\alpha(x)$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçiləndirsə, tərifə əsasən,

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \quad \forall x : 0 < |x-a| < \delta \quad |\alpha(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

şərti ödənir. $\alpha(x) \neq 0$ olduğundan, $0 < |x-a| < \delta$ qiymətlərində

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| = \frac{1}{|\alpha(x)|} > \frac{1}{\varepsilon}$$

bərabərsmzliyi doğrudur. $M = \frac{1}{\varepsilon}$ işarə etsək, souncu bərabərsizlikdən

$$\forall M > 0 \ \ \exists\delta > 0 \quad \forall x : 0 < |x-a| < \delta \quad \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > M$$

alırıq ki, bu da tərifə əsasən, $\frac{1}{\alpha(x)}$ funksiyasının x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz böyüyən olduğunu göstərir.

Tərsinə, əgər $\alpha(x)$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz böyüyəndirsə, tərifə əsasən,

$$\forall M > 0 \ \ \exists\delta > 0 \quad \forall x : 0 < |x-a| < \delta \quad |\alpha(x)| > M \tag{3}$$

şərti ödənir.Onda $0 < |x-a| < \delta$ qiymətlərində

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| = \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M}$$

bərabərsmzliyi doğrudur. $\varepsilon = \frac{1}{M}$ işarə etsək, souncu bərabərsizlikdən

$$\forall M > 0 \ \ \exists\delta > 0 \quad \forall x : 0 < |x-a| < \delta \quad \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| < \varepsilon$$

alırıq ki, bu da tərifə əsasən, $\frac{1}{\alpha(x)}$ funksiyasının x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən olduğunu göstərir. ■

Bu teorem göstərir ki, ***sonsuz kiçilən və sıfırdan fərqli funksiyanın tərs qiymətlərindən ibarət funksiya sonsuz böyüyən və tərsinə, sonsuz kiçilən funksiyanın tərs qiymətlərindən ibarət funksiya sonsuz böyüyəndir.***

Teorem 2. Əgər $\alpha(x)$ və $\beta(x)$ funksiyaları x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiyalardırsa, onda onların cəbri cəmlərindən idarət olan $\gamma(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)$ funksiyası da x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiyadır.

Başqa sözlə, ***sonsuz kiçilən iki funksiyanın cəbri cəmi də sonsuz kiçiləndir.***

İsbatı. Əgər $\alpha(x)$ və $\beta(x)$ funksiyaları x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiyalardırsa, onda

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \ \forall x:0<|x-a|<\delta_1\ \ |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

və

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0\ \ \forall x:0<|x-a|<\delta_2\ \ |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

bərabərsizlikləri ödənəcək. $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$ seçsək, $0<|x\text{-}a|<\delta$ şətrini ödəyən $\forall x$ qiymətlərində həm $0<|x-a|<\delta_1$, həm də $0<|x-a|<\delta_2$ şərtləri ödəndiyindən, həm (4), həm də (5) bərabərsizlikləri eyni zamanda ödənəcək.Bu halda

$$|\gamma(x)|=|\alpha(x)\pm\beta(x)|\le|\alpha(x)|\pm|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

alırıq. Yəni

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x:0<|x-a|<\delta\ \ |\gamma(x)|<\varepsilon$$

Olacaq ki, bu da tərifə əsasən, $\gamma(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)$ funksiyasının x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiya olduğunu göstərir. ■

Göstərmək olar ki, sonsuz kiçilən funksiyaların nəinki ikisinin cəbri cəmi, hətta ixtiyari sonlu saydasının cəbri cəmi də cəmi sonsuz kiçilən funksiyadır.

Teorem 3. Əgər $\alpha(x)$ və $\beta(x)$ funksiyaları x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiyalardırsa, onda onların $\gamma(x)=\alpha(x)\beta(x)$ hasili də x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiyadır.

Başqa sözlə, ***sonsuz kiçilən iki funksiyanın hasili də sonsuz kiçiləndir***.

İsbatı. Əgər $\alpha(x)$ və $\beta(x)$ funksiyaları x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiyalardırsa, onda

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \ \forall x: 0<|x-a|<\delta_1\ \ |\alpha(x)|<\varepsilon \tag{6}$$

və $\forall\varepsilon>0$ üçün, o cümlədən

$$\varepsilon=1\quad \exists\delta_2>0\ \ \forall x: 0<|x-a|<\delta_2\ \ |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

bərabərsizlikləri ödənəcək. $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$ seçsək, $0<|x\text{-}a|<\delta$ şətrini ödəyən $\forall x$ qiymətlərində həm $0<|x-a|<\delta_1$, həm də $0<|x-a|<\delta_2$ şərtləri ödəndiyindən, həm (6), həm də (7) bərabərsizlikləri eyni zamanda ödənəcək.Bu halda

$$|\gamma(x)|=|\alpha(x)\cdot\beta(x)|\le|\alpha(x)|\cdot|\beta(x)|<\varepsilon\cdot 1=\varepsilon$$

alırıq. Yəni

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x: 0<|x-a|<\delta\ \ |\gamma(x)|<\varepsilon$$

olacaq ki, bu da tərifə əsasən, $\gamma(x)=\alpha(x)\beta(x)$ funksiyasının x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiya olduğunu göstərir. ■

Göstərmək olar ki, sonsuz kiçilən funksiyaların nəinki ikisinin hasili, hətta ixtiyari sonlu saydasının hasili də cəmi sonsuz kiçilən funksiyadır.

Teorem 4. Əgər $\alpha(x)$ funksiyası x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən, $\beta(x)$ funksiyası isə $x=a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında məhdud funksiyadırsa, onda onların $\gamma(x)=\alpha(x)\beta(x)$ hasili də x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiyadır.

Başqa sözlə, ***sonsuz kiçilən funksiyanın məhdud funksiyaya hasili sonsuz kiçiləndir.***

İsbatı. $\beta(x)$ funksiyası isə məşdud funksiya olduğundan,

$$\exists M>0\ \ \forall x\in X\quad |\beta(x)|<M \tag{8}$$

bərabərsizliyi doğrudur. $\alpha(x)$ funksiyaları x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiya olduğundan isə

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\quad \forall x: 0<|x-a|<\delta\quad |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M} \tag{9}$$

şərti ödənəcək. Onda $0<|x\text{-}a|<\delta$ şətrini ödəyən $\forall x$ qiymətlərində həm (8), həm də (9) bərabərsizlikləri eyni zamanda ödəndiyindən, bu halda

$$|\gamma(x)|=|\alpha(x)\cdot\beta(x)|\le|\alpha(x)|\cdot|\beta(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

alırıq. Yəni

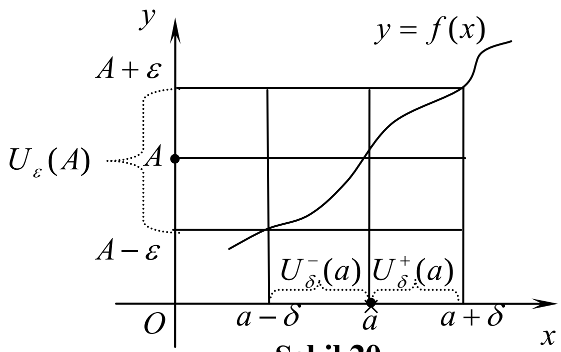
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x: 0<|x-a|<\delta\ \ |\gamma(x)|<\varepsilon$$

olacaq ki, bu da tərifə əsasən, $\gamma(x)=\alpha(x)\beta(x)$ funksiyasının x a-ya yaxınlaşdıqda sonsuz kiçilən funksiya olduğunu göstərir. ■

§4. Funksiyanın limiti

Fərz edək ki, hər hansı bir X çoxluğunda təyin olunmuş $y=f(x)$ funksiyası verilmişdir və a nöqtəsi X çoxluğunun limit nöqtəsidir, yəni a nöqtəsinin istənilən ətrafında X çoxluğundan həmişə ən azı bir element var.

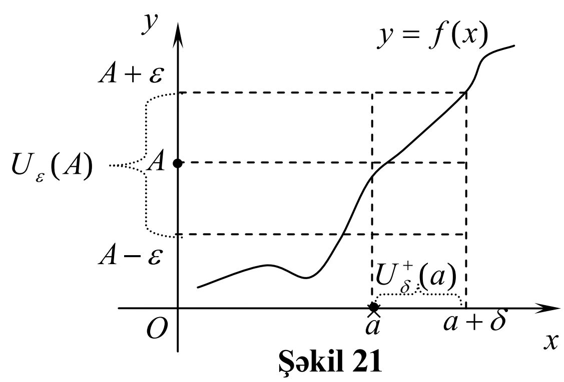
Tərif 11. Əgər elə sonlu A ədədi varsa ki, $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $0<|x-a|<\delta$ münasibətini ödəyən bütün x nöqtələrində $|f(x)-A|<\varepsilon$ şərti ödənsin, onda A ədədi $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limiti adlanır və $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ kimi işarə olunur (şəkil 20).



Şəkil 20

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\quad \forall x:\ 0<|x-a|<\delta\qquad |f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A=\lim_{x\to a} f(x)$$

Tərif 12. Əgər elə sonlu A ədədi varsa ki, $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $-\delta<x-a<0$ münasibətini ödəyən bütün x nöqtələrində $|f(x)-A|<\varepsilon$ şərti ödənsin, onda A ədədi $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində sol limiti adlanır və $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ kimi işarə olunur (şəkil

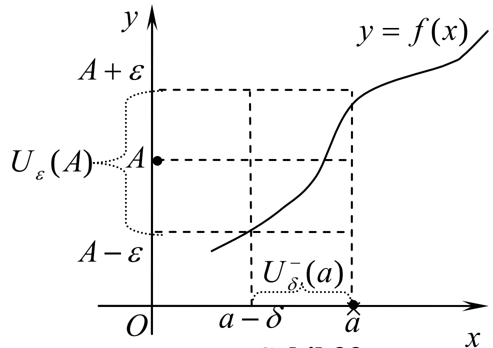


Şəkil 21

21).

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x:\ -\delta<x-a<0\qquad |f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow A=\lim_{x\to a-0}f(x)$$

Tərif 13. Əgər elə sonlu A ədədi varsa ki, $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $0<x-a<\delta$ münasibətini ödəyən bütün x nöqtələrində $|f(x)-A|<\varepsilon$ şərti ödənsin, onda A ədədi $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində sağ limiti adlanır və $A=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ kimi işarə olunur (şəkil 22).



Şəkil 22

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x:\ 0<x-a<\delta\qquad |f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow A=\lim_{x\to a+0}f(x)$$

$$\tilde{U}_\delta(a)=\{x:0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)\ ,$$

$$U_\delta^-(a)=\{x:-\delta<x-a<0\}=(a-\delta;a),$$

$$U_\delta^+(a)=\{x:0<x-a<\delta\}=(a;a+\delta)$$

bərabərliklərini nəzərə alsaq, funksiyanın birtərəfli (sol və sağ) limitlərinin və funksiyanın limitinin təriflərini aşağıdakı ekvivalent şəkildə də yazmaq olar:

$$\lim_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in\tilde{U}_\delta(a)=(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)\quad |f(x)-A|<\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in U_\delta^-(a)=(a-\delta;a)\quad |f(x)-A|<\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in U_\delta^+(a)=(a;a+\delta)\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

İndi isə $f(x)$ funksiyasının ∞- da limitinə tərif verək.

Tərif 14. Əgər elə sonlu A ədədi varsa ki, $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $|x|>\delta$ münasibətini ödəyən bütün x nöqtələrində $|f(x)-A|<\varepsilon$ şərti ödənsin, onda A ədədi $f(x)$ funksiyasının ∞-da limiti adlanır və $A=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ kimi işarə olunur

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x:\ |x|>\delta\qquad |f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow A=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

Tərif 15. Əgər elə sonlu A ədədi varsa ki, $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $x<-\delta$ münasibətini ödəyən bütün x nöqtələrində $|f(x)-A|<\varepsilon$ şərti ödənsin, onda A ədədi $f(x)$ funksiyasının $-\infty$-da limiti adlanır və $A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ kimi işarə olunur

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\quad \forall x:\ x<-\delta\quad |f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Tərif 16. Əgər elə sonlu A ədədi varsa ki, $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi tapmaq mümkündürsə ki, $x>\delta$ münasibətini ödəyən bütün x nöqtələrində $|f(x)-A|<\varepsilon$ şərti ödənsin, onda A ədədi $f(x)$ funksiyasının $+\infty$-da limiti adlanır və $A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ kimi işarə olunur

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\quad \forall x:\ x>\delta\quad |f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A=\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Göstərmək olar ki, A ədədini $f(x)$ funksiyasının $x=a$ nöqtəsində limiti olması üçün zəruri və kafi sərt bu A ədədinin $f(x)$ funksiyasının $x=a$ nöqtəsində həm sol, həm də sağ limiti olmasıdır.

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow A=\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)$$

Doğrudan da $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ isə, onda $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists\delta>0$ ədədi var ki, $\forall x\in(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)$ qiymətlərində

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{10}$$

münasibəti ödənəcək.Onda (10) münasibəti həm bütün $x\in(a-\delta;a)$, həm bütün $x\in(a;a+\delta)$ qiymətlərində ödənəcək ki, deməli həm $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, həm də $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ olacaq, yəni A ədədi $f(x)$ funksiyasının $x=a$ nöqtəsində həm sol, həm də sağ limitidir.

Tərsinə, əgər A ədədi $f(x)$ funksiyasının $x=a$ nöqtəsində həm sol, həm də sağ limitidirsə, yəni $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ və $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ münasibətləri ödənirsə, onda $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ münasibətindən

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_1>0\qquad \forall x\in(a-\delta_1;a)\quad |f(x)-A|<\varepsilon,$$

$A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ münasibətindən isə

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_2>0\qquad \forall x\in(a;a+\delta_2)\quad |f(x)-A|<\varepsilon$$

alırıq. $\delta = \min\{\delta_1;\delta_2\}$ seçsək, sonuncu iki münasibətdən alırıq ki, elə sonlu A ədədi var ki, $\forall\varepsilon > 0$ ədədi üçün $\exists\delta > 0$ ədədi tapmaq olur ki, $\forall x \in (a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)$ qiymətlərində $|f(x)-A| < \varepsilon$ münasibəti ödənir, yəni A ədədi $f(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsində limitidir: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \ \forall x \in (a-\delta;a)\cup(a;a+\delta) |f(x)-A| < \varepsilon \Leftrightarrow A = \lim_{x\to a} f(x)$$

§5. Funksiya limitinin bəzi xassələri

Tutaq ki, hər hansı X çoxluğunda təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası verilib və a nöqtəsi X çoxluğunun limit nöqtəsidir. $f(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsindəki limitini A ilə işarə edək: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Tərifə əsasən,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in (a-\delta;a)\cup(a;a+\delta) \quad |f(x)-A| < \varepsilon \tag{11}$$

şərti ödənir.

$$|f(x)-A| = \alpha(x) \tag{12}$$

işarə etsək, onda $\alpha(x)$ funksiyası üçün

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \ \forall x \in (a-\delta;a)\cup(a;a+\delta) \quad |\alpha(x)| < \varepsilon \tag{13}$$

alırıq ki, bu isə $\alpha(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsində sonsuz kiçilən funksiya və $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ olduğunu göstərir. (12) şərtindən $f(x) = A + \alpha(x)$ bərabərliyi alırıq. Beləliklə aşağıdpkı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 5. $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının limitinin A ədədinə bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt a nöqtəsinin müəyyən δ ətrafında $f(x)$ funksiyasının

$$f(x) = A + \alpha(x)\ , \quad \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0 \tag{14}$$

şəklində ayrılışa malik olmasıdır.

§6. Limitlər üzərində hesab əməlləri

Limitlər üzərində hesab əməlləri aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem 6. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiualarının $x = a$ nöqtəsində limitləri varsa və uyğun olaraq A və B ədədinə bərabərdirlərsə, onda

$f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $B\neq 0$ şərti daxilində isə $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiyasının da funksiyalarının da $x=a$ nöqtəsində limitləri var və bu limitlər, uyğun olaraq $A+B$, $A-B$, AB və $\dfrac{A}{B}$ ədədlərinə bərabərdir:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B\,; \tag{15}$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B\,; \tag{16}$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\;g(x)\right)=A\cdot B\;; \tag{17}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\;. \tag{18}$$

İsbatı. $A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ və $B=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ olduğundan, teorem 5-ə əsasən, a nöqtəsinin müəəyən ətrafında $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları. uyğun olaraq

$$f(x)=A+\alpha(x)\;,\qquad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \tag{19}$$

və

$$g(x)=B+\beta(x)\;,\qquad \lim_{x\to a}\beta(x)=0 \tag{20}$$

şəklində ayrılışlara malikdirlər.Onda $f(x)+g(x)$ funksiyasının

$$f(x)+g(x)=A+\alpha(x)+B+\beta(x)=A+B+\underbrace{\alpha(x)+\beta(x)}_{\gamma(x)}=A+B+\gamma(x) \tag{21}$$

şəklində ayrılışı olar ki, burada $\gamma(x)$ funksiyası iki sonsuz kiçilən $\alpha(x)$ və $\beta(x)$ funksiyalarının cəmi kimi sonsuz kiçilən funksiyadır.Funksiyanın limiti haqqında zəruri və kafi şərt olan teorem 5-ə əsasən

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B$$

alırıq.

Analoji olaraq $f(x)-g(x)$ funksiyası üçün

$$f(x)-g(x)=A+\alpha(x)-B-\beta(x)=A-B+\underbrace{\alpha(x)-\beta(x)}_{\theta(x)}=A-B+\theta(x) \tag{22}$$

$f(x)g(x)$ funksiyası üçün

$$f(x)g(x)=\left(A+\alpha(x)\right)\cdot\left(B+\beta(x)\right)=A\cdot B+\underbrace{\left(B\alpha(x)+A\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)\right)}_{\nu(x)}=A+B+\nu(x) \tag{23}$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiyası üçün isə

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A\cdot B+B\cdot\alpha(x)-A\cdot B-A\cdot\beta(x)}{B\left[B+\beta(x)\right]}=\frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B\left[B+\beta(x)\right]}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{B\left[B+\beta(x)\right]}\cdot\left[B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)\right]}_{\mu(x)}=\mu(x)$$

və ya

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}+\mu(x) \tag{24}$$

ayrılışlarını alırıq ki, burada $\theta(x)$ funksiyası sonsuz kiçilən $\alpha(x)$ və $\beta(x)$ funksiyalarının fərqi kimi, $\nu(x)$ funksiyası sonsuz kiçilən $B\alpha(x), A\beta(x)$ və $\alpha(x)\beta(x)$ funksiyalarının cəmi kimi, $\mu(x)$ funksiyası isə sonsuz kiçilən $B\alpha(x)-A\beta(x)$ funksiyasının məhdud $\dfrac{1}{B\left[B+\beta(x)\right]}$ funksiyasına hasili kimi sonsuz kiçilən funksiyalardırlar.

Teorem 5-ə əsasən, (22), (23) və (24) ayrılışlarından, uyğun olaraq, isbatları tələb olunan

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B\,,$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\,g(x)\right)=A\cdot B\;\;,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

bərabərliklərini alırıq. ■

§7. Bərabərsizliklərdə limit əməliyyatı

Teorem 7. Hər hansı X çoxluğunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası $\forall x\in X$ üçün $f(x)\geq\Delta$ ($f(x)\leq\Delta$) bərabərsizliyini ödəyirsə və bu çoxluğun hər hansı $x=a$ nöqtəsində $\lim_{x\to a}f(x)=A$ limiti varsa, onda $A\geq\Delta$ ($A\leq\Delta$) bərabərsizliyini ödənəcək.

İsbatı. Teoremin isbatını $\forall x \in X$ üçün $f(x) \le \Delta$ halı üçün aparaq. $\forall x \in X$ üçün $f(x) \le \Delta$ halında teorem analoji üsulla isbat olunur.

Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $\forall x \in X$ üçün $f(x) \le \Delta$ bərabərsizliyini ödəndiyi halda $A > \Delta$ olur. $A > \Delta$ bərabərsizliyindən $A - \Delta > 0$ alırıq.

$A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün $\exists \delta > 0$ var ki, $\forall x \in (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$ qiymətlərində $|f(x) - A| < \varepsilon$, yaxud

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \tag{25}$$

bərabərsizliyi ödənir.

(25) bərabərsizliyi $\forall \varepsilon > 0$ üçün, o cümlədən $\varepsilon_0 = \dfrac{A - \Delta}{2} > 0$ ədədi üçün ödənməlidir. Odur ki, $\varepsilon_0 = \dfrac{A - \Delta}{2}$ ədədi üçün elə δ_0 ədədi var ki, $\forall x_0 \in (a - \delta_0; a) \cup (a; a + \delta_0)$ qiymətlərində

$$\Delta = \frac{\Delta + \Delta}{2} < \frac{A + \Delta}{2} = \frac{2A - A + \Delta}{2} = A - \frac{A - \Delta}{2} = A - \varepsilon_0 < f(x) < A + \varepsilon_0,$$

yəni $f(x) > \Delta$ bərabərsizliyi alırıq ki, bu da $\forall x \in X$ üçün $f(x) \le \Delta$ şərtinə ziddir. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil: $A > \Delta$ ola bilməz, $A \le \Delta$ olmalıdır. ■

Qeyd edək ki, teoremin şərtindəki $f(x) \le \Delta$ və ya $f(x) \ge \Delta$ bərabərsizlikləri öz qeyri ciddiliyini itirdikdə belə, yəni $f(x) < \Delta$ və ya $f(x) > \Delta$ bərabərsizlikləri ilə əvəz olunduqda da, hökmdəki qeyri ciddi $A \le \Delta$ və $A \ge \Delta$ bərabərsizlikləri öz qüvvəsini saxlayır. Məsələn, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiyasının $x > 0$ qiymətlərində $f(x) > 0$ bərabərsizliyini ödəməsinə baxmayaraq, $x \to +\infty$-da limiti sıfıra bərabərdir: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Deməli, ***bərabərsizliklərdə limit əməliyyatı zamanı bərabərsizlik ən uzağı öz ciddiliyini itirə bilər.***

§8. Aralıq funksiyanın limiti haqqında teorem.

Teorem 8. (aralıq funksiyanın limiti haqqında teorem). X çoxluğunda təyin olunmuş $f(x)$, $g(x)$ və $h(x)$ funksiyaları $\forall x \in X$ qiymətlərində

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \tag{26}$$

bərabərsisliklərini ödəyirsə və hər hansı $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ və $h(x)$ funksiyalarının A ədədinə bərabər limitləri varsa $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$, onda $g(x)$ funksiyasının da $x = a$ nöqtəsində limiti var və bu limit də elə həmin A ədədinə bərabərdir: $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

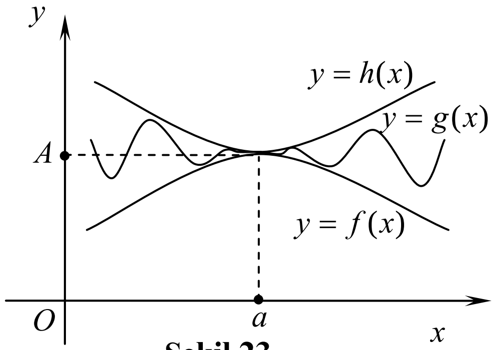
İsbatı: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_1 > 0 \;\; \forall x \in (a - \delta_1; a) \cup (a; a + \delta_1)$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{və ya} \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \tag{27}$$

bərabərsizliyi, $A = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ olduğundan isə, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 > 0$ $\forall x \in (a - \delta_2; a) \cup (a; a + \delta_2)$

$$|h(x) - A| < \varepsilon \quad \text{və ya} \quad A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon \tag{28}$$

bərabərsizliyi doğrudur. $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$ seçsək, $\forall x \in (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$ qiymətlərində (27) və (28) bərabərsizliklərinin hər ikisi eyni zamanda ödənidiyindən, (26) bərabərsizliyindən $A - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < A + \varepsilon$ və ya $A - \varepsilon \le g(x) \le A + \varepsilon$, yaxud



Şəkil 23

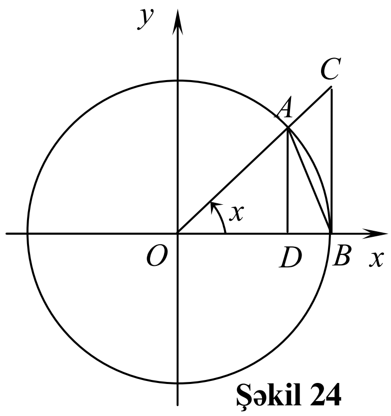
$$|g(x) - A| < \varepsilon \tag{29}$$

alırıq ki, bu isə $A = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ olduğunu göstərir. ■

§9. Birinci görkəmli limit-sonsuz kiçik qövsün sinusunun qövsün uzunluğuna nisbətinin qövsün uzunluğu sıfıra yaxınlaşdıqda limiti.

Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu çevrə çəkək və bu çevrə üzərində qövsünün uzunluğu müsbət x radian olan AB qövsü ayıraq. B nöqtəsində çevrəyə toxunan çəkək. O nöqtəsi ilə A nöqtəsinin birləşdirən L düz xəttini çəkək. Bu AB qövsünün mərkəzi busağı absis oxunun müsbət istiqaməti ilə saat əqrəbinin əksi istiqamətində x radian olan bucaq əmələ gətirir. Vahid radiuslu çevrənin radiusları kimi, $|OA| = |OB| = 1$ olduğundan, düzbucaqlı OAD üçbucağından $\dfrac{|AD|}{|OA|} = \sin x$, buradan isə $|AD| = \sin x$, düzbucaqlı

OBC üçbucağından $\frac{|BC|}{|OB|}=tgx$, buradan isə $|BC|=tgx$ alırıq (şəkil 24).



Şəkil 24

Şəkil 24-dən də göründüyü kimi

$$S_{\Delta OAB} < S_{sekOAB} < S_{\Delta OCB}.$$

Buradan

$$\frac{1}{2}|OB|\cdot|AD| < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}|OB|\cdot|BC| \quad \text{və ya}$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx,$$

alınmış bərabərsizliyin hər tərəfini 2-yə vurduqdan sonra isə

$$\sin x < x < tgx \tag{30}$$

bərabərsizlikləri alırıq. (30) bərabərsizliklərinin hər tərəfini $\sin x > 0$ ifadəsinə bölsək

$$1 < \frac{1}{sin\,x} < \frac{1}{cos\,x} \quad \text{və ya} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

bərabərsizliyini, alınmış bərabərsizliyin hər tərəfini (-1)-ə vurduqdan sonra isə

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$$

bərabərsizliyini almış olarıq.Sonuncu bərabərsizliyin hər tərəfinə 1əlavə edib,$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ düsturundan istifadə etsək

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x \;= 2\sin^2\frac{x}{2} \tag{31}$$

alarıq. $0 \le \sin\frac{x}{2} \le 1$ qiymətlərində $\sin^2\frac{x}{2} \le \sin\frac{x}{2}$olduğunu və kiçik $x$bucaqları üçün $\sin x < x$ bərabərsizliyini də nəzərə aldıqda isə (31) bərabərsizliyindən

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2} < 2\frac{x}{2} = x\;,$$

yəni

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < x$$

bərabərsizliyi alınır. Alınmış sonuncu bərabərsizliklərdə$x \to 0$ şərti daxilində limitə keçsək və $\lim_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$ olduğunu nəzərə alsaq, aralıq funksiyanın limiti haqqında teoremə əsasən,

$$\lim_{x\to 0+}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0\ ,$$

buradan isə

$$1-\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=0 \qquad \text{və ya} \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

bərbərliyini almış olarıq.

Əgər $y<0$ bucağıgötürüb, $x=-y$ əvəzləməsi aparsaq, $x>0$ və $\sin y$ funusiyasının tək funksiya olmasınnı nəzərə alsaq,

$$\lim_{y\to 0-}\frac{\sin y}{y}=\lim_{y\to 0-}\frac{\sin(-y)}{(-y)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

alırıq.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1$$

olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

bərabərliyini alırıq.

§10. İkinci görkəmli limit: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e$

Məlumdur ki,istənilən natural n ədədi üçün $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ardıcıllığı artan ardıcıllıq olub, yuxarıdın 3 ədədi ilə məhduddur.Yuxarıdan məhdud artan ardıcıllıq yığılan olduğundan, $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ardıcıllığının limiti var və $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ işarə olunur.

İxtiyari x ədədi özünün tam $[x]$ və kəsr $\{x\}$ hisssinin cəmindən ibarətdir: $x=[x]+\{x\}$. $[x]=n$ ilə işarə edək.Onda

$$x=n+\{x\}$$

alarıq. x ədədinin kəsr hissəsi $0\le\{x\}<1$ olduğundan,

$$n\le x<n+1 \tag{32}$$

bəarbərsizliyi doğru olacaq. (32) bərabərsizliyindən

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},$$

alınmış bu bərabərsizliyin hər tərəfinə 1 əlvə etdikdə isə

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n} \qquad (33)$$

bərabərsizliyini almış olarıq.(32) və (33) bərabərsizliklərindən $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ifadəsi üçün

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (34)$$

şəklindəqiymətləndirmə alınır ki, buradan da

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} == \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

və

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

bərabərliklərini və $n\to\infty$ qiymətlərində $x\to\infty$ olduğunu nəzərə almaqla (34) bərabərsizliyində $n\to\infty$ şərti daxilində limitə keçsək, aralıq funksiyanın limiti haqqında teoremə əsasən,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (35)$$

bərabərliyini almış olarıq.

(35) bərabərliyində $y=\frac{1}{x}$ əvəzləməsi aparmaqla $x=\frac{1}{y}$ alarıq. $x\to\infty$ qiymətlərində $y\to 0$ olduğunu nəzərə almaqla (34) bərabərliyindən ikinci görkəmli limitin digər forması olan

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e \qquad (36)$$

bərabərliyini almış oluruq.

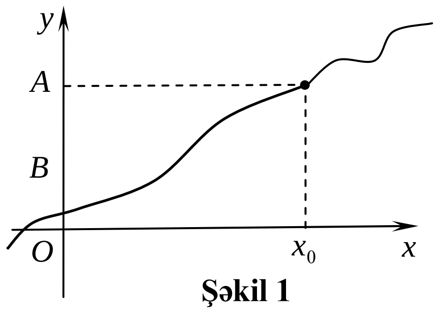
§ 1. Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi.

Fərz edək ki, hər hansı X çoxluğunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası verilmişdir və x_0 nöqtəsi X çoxluğunun limit nöqtəsidir, yəni x_0 nöqtəsinin istənilən ətrafında X çoxluğundan ən azı bir element var.

Tərif 1. x_0 ***nöqtəsində*** $f(x)$ ***funksiyasının limiti onun bu nöqtədə qiymətinə bərabərdirsə,*** $f(x)$ ***funksiyası*** x_0 ***nöqtəsində kəsilməz funksiya,*** x_0 ***nöqtəsi isə*** $f(x)$ ***funksiyasının kəsilməzlik nöqtəsi adlanır:***

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin bu tərifində yalnız birtərəfli (sol və sağ) limitlərdən istifadə olunarsa, funksiyanın bu cür kəsilməzliyi də müfafiq olaraq birtərəfli (sol və sağ) kəsilməzlik adlanır.

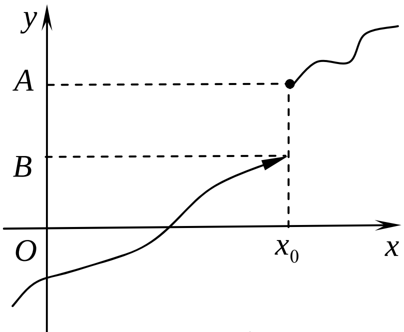


Şəkil 1

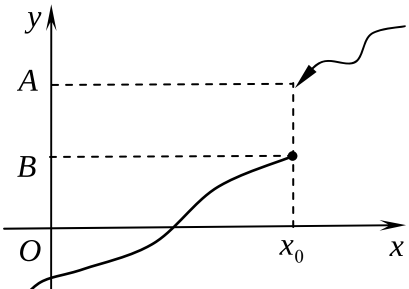
Tərif 2. x_0 ***nöqtəsində*** $f(x)$ ***funksiyasının sol (sağ) limiti onun bu nöqtədə qiymətinə bərabərdirsə,*** $f(x)$ ***funksiyası*** x_0 ***nöqtəsində soldan (sağdan) kəsilməz funksiyaadlanır:***

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \ \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Limitin analoji xassəsindən istifadə edərək, göstərmək olar ki, funksiyanın hər hansı nöqtədə kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt onun həmin nöqtədə həm soldan, həm də sağdan kəsilməz olmasıdır.



Şəkil 2



Şəkil 3

Funksiyanın nöqtədə limitin «$\varepsilon-\delta$ dilində» tərifindən istifadə etməklə, (1) bərabərliyindən funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin «$\varepsilon-\delta$ dilində» aşağıdakı tərifini almaq olar.

Tərif 3. $\forall\varepsilon>0$ ***ədədi üçün*** $\exists\delta>0$ ***ədədi varsa ki,*** $\forall x\in(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta)$

qiymətlərində $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ ***bərabərsizliyi ödənsin, onda*** $f(x)$ ***funksiyası*** x_0 ***nöqtəsində kəsilməz funksiya adlanır.***

Kəsilməzliyin bu tərifini riyazi məntiq simvolları ilə

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta) \quad \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon \tag{2}$$

şəklində yazmaq olar.

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ olduğundan, (1) bərabərliyini

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) \tag{3}$$

şəklində də yazmaq olar. (3) bərabərliyi funksiyanın kəsilməzlik nöqtəsində limitə keçdikdə limitl əməliyyatı ilə funksiya əməliyyatın ardıcıllığını dəyişməyin mümkünlüyünü göstərir.

Sabit $f(x_0)$ ədədinin limiti kimi özünə bərabər olduğundan, onu (1) bərabərliyinin sol tərəfinə keçirib limit işarəsi daxilinə salsaq, $x\to x_0$ və $(x-x_0)\to 0$ ifadələrinin eynigüclü olduğunu nəzərə alsaq, (1)bərabərliyiyndən

$$\lim_{(x-x_0)\to 0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0 \tag{4}$$

bərabərliyini alırıq.

$x-x_0$ fərqini Δx ilə işarə edib x_0 nöqtəsində arqument artımı, $f(x)-f(x_0)$ fərqini Δy ilə işarə edib x_0 nöqtəsində funksiya artımı adlandırsaq

$$\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

alarıq. Bu zaman (4) bərabərliyini

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \tag{5}$$

şəklində yazmaq olar ki, aşağıdakı şəkildə ifadə etməklə ona kəsilməzliyin növbəti tərifi kimi baxmaq olar.

Tərif 4. ***Sərbəst*** x ***dəyişəninin*** x_0 ***nöqtəsindəki artımı sıfıra yaxınlaşdıqda*** $f(x)$ ***funksiyasının da*** x_0 ***nöqtəsindəki artım sıfıra yaxınlaşırsa ,*** $f(x)$ ***funksiyası*** x_0 ***nöqtəsində kəsilməz funksiya adlanır.***

Yəni, ***kəsilməz funksiyanın arqument artımı*** 0***-a yaxınlaşdıqda, funksiya artımı da*** 0***-a yaxınlaşır.***

(5) bərabərliyinə kəsilməzliyin növbəti tərifi kimi baxmaq olar və

elementar funksiyaların kəsilməzliyini göstərmək üçün məhz sonuncu bu tərifdən istifadə olunur.

§ 2. Nöqtədə kəsilməz funksiyalar üzərində hesab əməlləri

Funksiyanın nöqtədə limiti üzərində hesab əməllərinin tətbiqindən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır.

Teorem 1. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları hər hansı x_0 nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ funksiyaları, əlavə olaraq $g(x_0)\neq 0$ şərti ödəndikdə isə $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiyası da x_0 nöqtəsində kəsilməzdirlər.

İsbatı: $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları x_0 nöqtəsində kəsilməz olduğundan

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{6}$$

və

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0) \tag{7}$$

bərabərlikləri ödənir.

Limitlər üzərində hesab əməllrini nəzərə alsaq.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)-g(x_0)$$

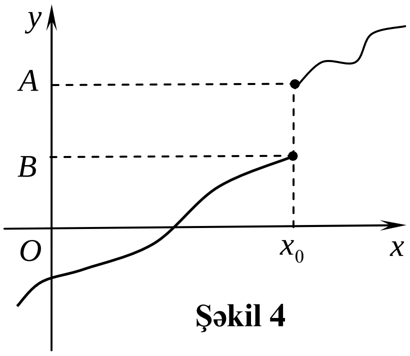
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(x_0)\cdot g(x_0)$$

$g(x_0)\neq 0$ şərti ödəndikdə isə $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ bərabərlikləri alırıq ki, onlar da müvafiq olaraq $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiyalarının x_0 nöqtələrində kəsilməz olduqlarını göstərirlər.■

§ 3. Funksiyanın kəsilmə nöqtələrinin təsnifatı

Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin tərifinə əsasən, $f(x)$ funksiyasını

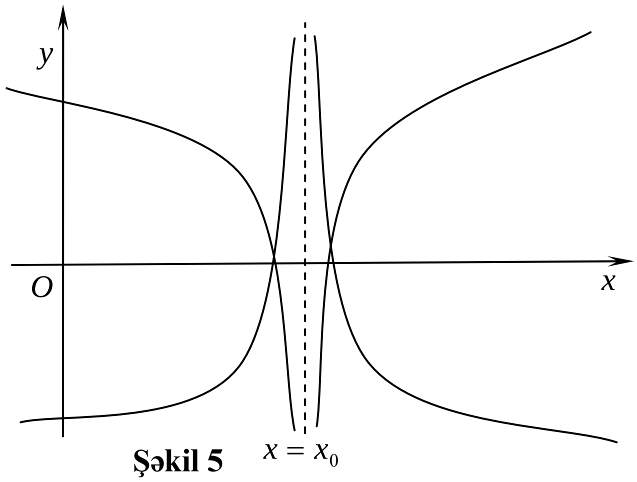
x_0 nöqtəsində $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limiti, onun bu nöqtədəki $f(x_0)$qiymətinə bərabərdirsə, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz, x_0 nöqtəsi isə $f(x)$ funksiyasını kəsilməzlik nöqtəsi adlanır. Əks tədqirdə yəni ya funksiyanın bu nöqtədə limiti yoxdursa və ya funksiyanın nöqtədə limiti varsa, lakin funksiyanın həmin nöqtədəki qiyməti ilə üst-üstə düşmürsə, onda x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtəsi adlanır. Funksiyanın kəsilmə nöqtələri I və II növ olmaqla iki növə ayrılır.



Şəkil 4

1) x_0 nöqtəsi o halda $f(x)$ funksiyanın ***I növ kəsilmə nöqtəsi*** adlanır ki, $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsindəki birtərəfli (sol və sağ) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ və $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ limtləri sonludur, lakin onlar bir-birinə bərabər deyil (şəkil 4).

2) x_0 nöqtəsi o halda $f(x)$ funksiyasının ***II növ kəsilmə nöqtəsi*** adlanır ki, bu nöqtədə $f(x)$ funksiyasının birtərəfli (ya sol, ya sağ) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ və $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ limitlərdən heç olmazsa biri və ya hər ikisi sonlu olmasın (şəkil 5).



Şəkil 5

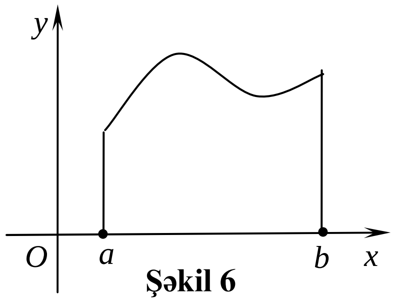
§ 4. Parçada kəsilməz funksiyalar və onların əsas xassələri

$(a;b)$ intervalında təyin olunmuş və $(a;b)$ intervalının hər bir x nöqtəsində kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası $(a;b)$ intervalında kəsilməz funksiya adlanır.

$[a;b]$ parçasında təyin olunmuş:

1) bu parçasının daxilində yəni $(a;b)$ intervalında kəsilməz;

2) parçanın sol ucü olan a nöqtəsində sağdan kəsilməz $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$;



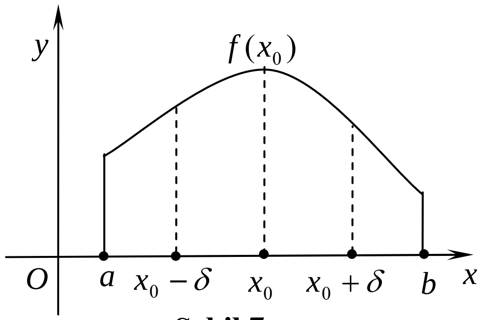
Şəkil 6

3) parçanın sağ ucü olan b nöqtəsində soldan kəsilməz $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$

olan $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməz funksiya adlanır (şəkil 6).

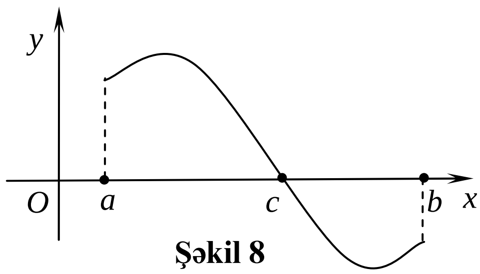
İsbatsız olaraq parçada kəsilməz funksiyaların aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

Xassə 1. (kəsilməz funksiyanın işarəsinin dayanıqlığı) $(a;b)$ intervalında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası hər hansı $x_0 \in (a;b)$ nöqtəsində $f(x_0) \neq 0$ qiyməti alırsa, onda x_0 nöqtəsinin elə ətrafı var ki, bu ətrafdan olan bütün nöqtələrdə $f(x)$ funksiyasının aldığı qiymətinin işarəsi $f(x_0)$ qiymətinin işarəsi ilə eyni olacaq (şəkil 7).



Şəkil 7

Xassə 2. $[a;b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası parçanın uc nöqtəsində müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, bu parçanın daxilində elə c nöqtəsi var ki, bu nöqtədə funksiyanın qiyməti sıfıra bərabərdir: $f(c)=0$ (şəkil 8).



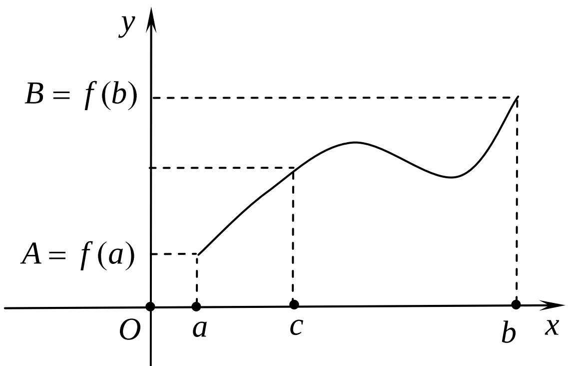
Şəkil 8

Xassə 3. $[a;b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası bu parçadan aldığı iki qiymət arasında bütün qiymətləri alır.

$$f(a)=A,\ f(b)=B \quad \forall C \in (\min\{A;B\} \max\{A;B\})$$

$$\exists c \in (a;b) \quad f(c)=C$$

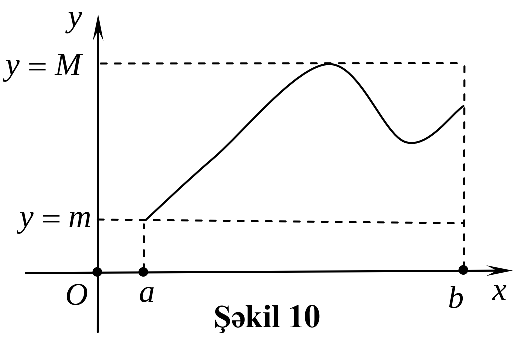
Bu xassə onu göstərir ki, parçada kəsilməz funksiyanın aldığı qiymətlər çoxluğu ayrı-ayrı nöqtələrin çoxluğu deyil, müəyyən aralıq təşkil edir (şəkil 9).



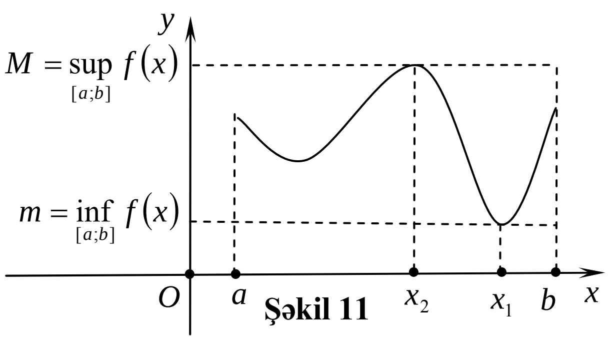
Şəkil 9

Xassə 4. $[a;b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası, həm də bu parçada məhduddur (şəkil 10).

Xassə 5. $[a;b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası bu parçada özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini alır: $\exists x_1, x_2 \in [a;b]$, $f(x_1) = m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$ $f(x_2) = M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ (şəkil 11).



Şəkil 10



Şəkil 11

Diferensial hesabı

§ 1. Törəmə anlayışı. Törəmənin həndəsi və fiziki mahiyyəti

Bir çox tətbiqi məsələlərin həllində funksiya artımının arqument artımına olan nisbətinin arqument artımı 0-a uaxınlaşdıqda limitini hesablamaq lazım gəlir.

Fərz edək ki, hər hansı X çoxluğunda təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir və $x_0 \in X$ nöqtəsinə elə Δx artımı verək ki, $(x_0 + \Delta x) \in X$ şərti ödənsin. $y = f(x)$ funksiyanın x_0 nöqtəsində artımı $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ olacaq.

Tərif 1. ***x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ artımının sərbəst dəyişənin Δx artımına nisbətinin $\Delta x \to 0$ şərtində limiti (əgər bu limit varsa) $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi adlanır $f'(x_0)$ kimi işarə olunur:***

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

Əgər funksiyanın nöqtədəki törəməsinin tərifində yalnız birtərəfli (sol və sağ) limitlərdən istifadə olunarsa, onda bu törəmələr də müvafiq olaraq birtərəfli (sol və sağ) törəmələr adlanır

Tərif 2. ***x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ artımının sərbəst dəyişənin Δx artımına nisbətinin $\Delta x \to 0$ şərtində sol (sağ) limiti (əgər bu limit varsa) $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində sol (sağ) törəməsi adlanır $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$)kimi işarə olunur:***

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{2}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

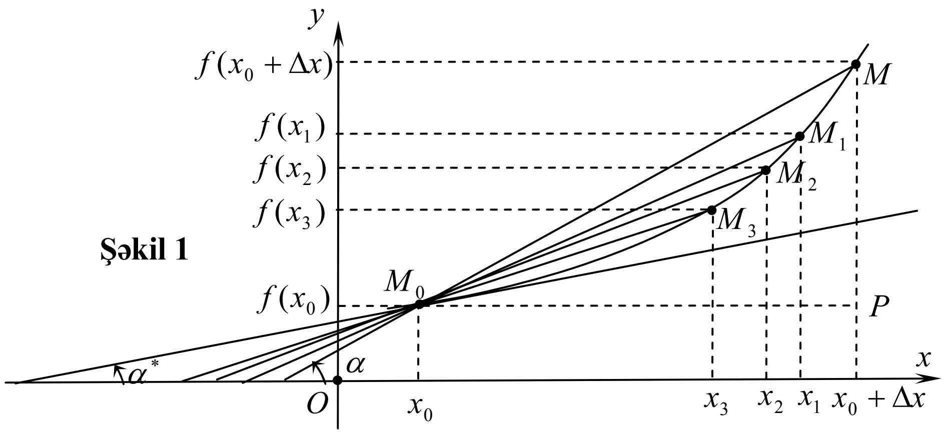
Limitin analoji xassəsindən istifadə edərək, göstərmək olar ki, $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində $f'(x_0)$ törəməsinin olması üçün zəruri və kafi şərt, onun bu nöqtədə sağ və sol törəmələrinin olması və törəmələrin bir-birinə bərabər olmasıdır:

S.Y. Əliyev. Ali riyaziyyat kursundan mühazirələr. Bakı, 2007

$$f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0). \qquad (4)$$

Bu halda $f'(x_0) = f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$ olacaq.

İndi isə törəmə anlayışının həndəsi və fiziki mahiyyətlərini şərh edək. Funksiya artımının



Şəkil 1

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ifadəsini törəmənin (1) düsturunda nəzərə alsaq

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

alarıq.

Şəkil 1-dən göründüyü kimi, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{PM}{M_0 P} = tg\alpha = k$ olduğundan, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbəti həndəsi olaraq, funksiya qrafikinin $M_0(x_0; f(x_0))$ və $M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ nöqtələrini gərən vətərin bucaq əmsalını ifadə edir.

$\Delta x \to 0$ şərtində M nöqtəsini funksiyanın qrafiki boyunca M_0 nöqtəsinə yaxınlaşdığından. limit vəziyyətində M_0 və M nöqtələrini gərən vətər M_0 nöqtəsində funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunana çevrilir:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = tg\left(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha\right) = tg\alpha^* = k^*.$$

Deməli funksiyanın $f'(x_0)$ törəməsi həndəsi olaraq, bu funksiyanın qrafikinə absisi x_0 olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını ifadə edir. Onda $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə, bu qrafik üzərində olub absisi x_0 olan $M_0(x_0; f(x_0))$ nöqtəsində çəkilmiş töxunanın tənliyi $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən, bucaq əmsalı $k^* = f'(x_0)$ ədədinə bərabər düz xəttin tənliyi kimi

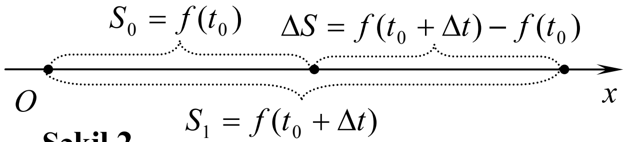
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

şəklində, $y_0 = f(x_0)$ qiymətini nəzərə aldıqda isə

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{5}$$

şəklində olacaq. (5) tənliyi $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə, bu qrafik üzərində olub absisi x_0 olan $M_0(x_0; f(x_0))$ nöqtəsində çəkilmiş töxunanın tənliyi adlanır.

Törəmənin fiziki mahiyyətini izah etmək üçün düz xətt boyunca hərəkət edən və t zaman müddətində $S = f(t)$ məsafəsini qət edən maddi nöqtənin dəyişənsürətli hərəkətinə baxaq (şəkil 2).



Şəkil 2

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

fərqi Δt zaman müddətində bu maddi nöqtənin qət etdiyi məsafəni ifadə etdiyindən, $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$ nisbəti, Δt zaman müddətində bu maddi nöqtənin orta hərəkət sürəti v_{orta}-nı ifadə edəcək: $v_{orta} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

$\Delta t \to 0$ şərtində orta sürət ani sürətə çevrildiyindən,

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{orta} = v_{ani},$$

törəmə fiziki olaraq düz xətt boyunca dəyişənsürətli hərəkət edən maddi nöqtənin ani sürətini ifadə edəcək.

§ 2. Törəmənin hesablama alqoritmi

Törəmənin

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

tərifindən göründüyü kimi, verilmiş $f(x)$ funksiyasının hər hansı x nöqtəsində $f'(x)$ törəməsini:

1. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ funksiya artımını;

2. Funksiya artımınının arqument artımına olan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ nisbətini;

3. Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbətinin arqument artımı 0-a yaxınlaşdıqda $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limiti kimi hesablamaqla tapmaq olar.

Bu prosesin yuxarıda göstərilən ardıcıllıqla aparılması **törəmənin hesablama alqoritmi** adlanır. Bu alqoritmdən istifadə edərək bəzi elementar funksiyaların törəmələri üçün düstur çıxaraq.

I. **Sabit funksiya :** $f(x) \equiv C = const$

1. Funksiya artımını $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C \equiv 0$;

2. Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbəti $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$;

3. Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbətinin arqument artımı 0-a yaxınlaşdıqda limiti kimi $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Deməli, ***sabitin funksiyanın törəməsi*** 0***-a bərabərdir***: $(C)' \equiv 0$.

II. **Qüvvət funksiyası** $f(x) = x^n$.

1. Funksiya artımını Nyuton binomu düsturuna əsasən

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}(\Delta x) + \cdots + C_n^{n-1} x(\Delta x)^{n-1} +$$

$$+ C_n^n (\Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n \ ;$$

2. Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbəti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x}{\Delta x} + \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x} +$$

$$+ \ldots + \frac{(\Delta x)^n}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1};$$

3.Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbətinin arqument artımı 0-a yaxınlaşdıqda limiti kimi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x \right] + \ldots + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Deməli ***qüvvət funksiyasının törəməsi*** $(x^n)' = nx^{n-1}$.

III. **Loqarifmik funksiya** : $f(x) = \log_a x$, $(0 < a \neq 1)$.

1.Funksiya artımını

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a(1+\frac{\Delta x}{x})\,;$$

2.Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbəti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}\,;$$

3.Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbətinin arqument artımı 0-a yaxınlaşdıqda limiti kimi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\cdot\log_e a} = \frac{1}{x\cdot\ln a}\,.$$

Deməli, ***loqarifmik funksiyasının törəməsi*** : $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Xüsusi halda $a=e$ qiymətində $\log_e x = \ln x$ olduğundan, $\ln e = \log_e e = 1$ bərabərliyindən istifadə etməklə, bu funksiyanın törəməsi üçün

$$(\ln x)' = \frac{1}{x\ln e} = \frac{1}{x}$$

alırıq.

IV. $f(x) = \sin x$

1.Funksiya artımını

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\,;$$

2.Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbəti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\,;$$

3.Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbətinin arqument artımı 0-a yaxınlaşdıqda limiti kimi

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=$$

$$=1\cdot\cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}(x+\frac{\Delta x}{2})\right]=\cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}x+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2}\right]=\cos(x+0)=\cos x\,.$$

Deməli, $\sin x$ ***funksiyasının törəməsi*** : $(\sin x)'=\cos x$.

V. $f(x)=\cos x$

1.Funksiya artımını

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}=$$

$$=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\,;$$

2.Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbəti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\,;$$

3.Funksiya artımınının arqument artımına olan nisbətinin arqument artımı 0-a yaxınlaşdıqda limiti kimi

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\right]=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})=$$

$$=-1\cdot\sin\left[\lim_{\Delta x\to 0}(x+\frac{\Delta x}{2})\right]=-\sin\left[\lim_{\Delta x\to 0}x+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2}\right]=-\sin(x+0)=-\sin x\,.$$

Deməli, $\cos x$ ***funksiyasının törəməsi*** : $(\cos x)'=-\sin x$.

§ 3. Funksiyanın diferensiallanması anlayışı.

Diferensiallanma və kəsilməzlik anlayışları arasındakı əlaqə.

Fərz edək ki, X çoxluğunda təyin olunmuş $y=f(x)$ verilmişdir. $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ fərqi $x_0\in X$ nöqtəsində bu funksiyanın artımıdır.

Tərif 3. $y=f(x)$ ***funksiyanın*** x_0 ***nöqtəsindəki*** $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ***artımı***

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x \qquad (6)$$

Şəklində ayrılışa malikdirsə, $y = f(x)$ ***funksiyası*** x_0 ***nöqtəsində diferensiallanan funksiya adlanır; burada*** A ***ədədi*** Δx ***-dən asılı olmayan sabit ədəd,*** $\alpha(\Delta x)$ ***funksiyası isə*** $\Delta x \to 0$ ***şərtində sonsuz kiçilən funksiyadır*** $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$**.**

Teorem 1. $y = f(x)$ ***funksiyasının*** x_0 ***nöqtəsində diferensiallanan olması üçün zəruri və kafi şərt onun bu nöqtədə sonlu*** $f'(x_0)$ ***törəməsinin olmasıdır.***

İsbatı.*Zərurilik.* Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanandır, yəni onun x_0 nöqtəsində Δy funksiya artımı üçün (6) ayrılışı doğrudur. Göstərək ki, bu funksiyanın x_0 nöqtəsində sonlu $f'(x_0)$ törəməsi var.

(6) bərabərliyinin hər bir tərəfini Δx -ə bölsək

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

alırıq.Onda $f'(x_0)$ törəməsi üçün

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A + \alpha(\Delta x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A$$

bərabərliyi $y = f(x)$ funksiyanın x_0 nöqtəsində sonlu $f'(x_0)$ törəməsinin olduğunu və onun A ədədinə bərabər olduğunu göstərir.

Kafilik. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində sonlu $f'(x_0) = A$ törəməsi var. Göstərək ki, bu funksiya x_0 nöqtəsində diferensiallanandır, yəni onun x_0 nöqtəsində Δy funksiya artımı üçün (6) ayrılışı doğrudur,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

olduğundan, limitin xassəsinə əsasən.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \tag{7}$$

şəklidə göstərilə bilər, $\alpha(\Delta x)$ funksiyası isə $\Delta x \to 0$ şərtində sonsuz kiçilən funksiyadır $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. (7) bərabərliyinin hər tərəfini Δx -ə vursaq,

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

ayrılışını alarıq ki,bu ayrılış da $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində diferensiallanan olduğunu göstərir.■

Bu teorem funksiyanın nöqtədə diferensiallanması anlayışı ilə onun bu nöqtədə sonlu törəməsinin olması anlayışlarının eynigüclü anlayışlar olduğunu göstərir. Odur ki,riyazi ədəbiyyatlarda «funksiyanın nöqtədə sonlu törəməsi var» ifadəsi əvəzinə «funksiya nöqtədə diferensiallandır» ifadəsi işlənir.

§ 4. Funksiyanın diferensialı anlayışı. Diferensialın həndəsi mahiyyəti

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, $f(x)$ funksiyası x nöqtəsində diferensiallanandırsa, onunbu nöqtədə Δy funksiya artımı

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x \tag{8}$$

ayrılışına malikdir, harada ki, $\alpha(\Delta x)$ funksiyası isə $\Delta x \to 0$ şərtində sonsuz kiçilən funksiyadır: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. (8) ayrılışının sağ tərəfi iki toplananın cəmindən ibarətdir. İkinci toplanan $\Delta x \to 0$ şərtində daha yüksək tərtibdən sonsuz kiçiləndir və (8) ayrılışında Δy funksiya artımının əsas qiymətləri birinci toplananla müəyyən olunur. Odur ki, birinci toplanan (8) ayrılışının **baş hissəsi** adlanır. Bu toplanan həm də Δx artımına nəzərən xətti olduğundan, o həm də (8) ayrılışının **xətti baş hissəsi** adlanır.

Tərif 4. ***(8) ayrılışının xətti baş hissəsi olan*** $A\Delta x$ ***ifadəsi*** $y=f(x)$ ***funksiyasının*** x ***nöqtəsində diferensialı adlanır və*** dy ***ilə işarə olunur.***

$$dy = A\cdot\Delta x \tag{9}$$

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, $f(x)$ funksiyası x nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda onun bu nöqtədə sonlu $f'(x)=A$ törəməsi var.Bu halda onun diferensialı

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x \tag{10}$$

kimi ifadə olunacaq.

Xüsusi halda $y=x$ funksiyasının diferensiallı üçün (10) düsturunu tətbiq etsək

$$dx = dy = (x)'\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x$$

alarıq. Yəni, sərbəst dəyişənin diferensialı elə onun artımına bərabərdir. Bunu (10) bərabərliyində nəzərə almaqla, funksiyanın diferensialı üçün

$$dy = f'(x)\cdot dx \tag{11}$$

düsturunu alarıq.

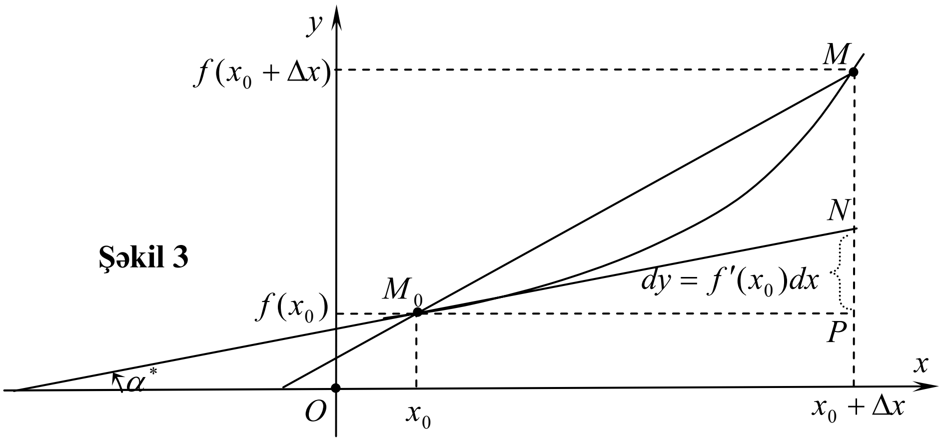
Diferensialın invariant forması adlanan (11) bərabərliyi, diferensiallanan $y = f(x)$ funksiyasının dy diferensialının onun $f'(x)$ törəməsi ilə sərbəst dəyişənin dx diferensialına hasilnə bərabər olduğunu ifadə edir.

(11) düsturundan

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{12}$$

bərabərliyi alınır ki, bu ifadə də funksiyanın törəməsinin bu funksiyanın diferensialının sərbəst dəyişənin diferensiallanma nisbəti kimi baxmağın mümkünlüyünü göstərir. Törəmənin bu cür işarələnməsindən biz gələcəkdə istifadə edəcəyik.

Funksiyanın qrafikinə bu qrafik üzərində olan $M(x; f(x))$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını ifadə edən törəmədən fərqli olaraq, funksiyanın diferensialı,



Şəkil 3

həndəsi olaraq, həmin toxunanın artımını ifadə edir (şəkil 3)

$$dy = f'(x)dx = tg\alpha \cdot \Delta x = NP .$$

§ 5. Diferensiallaşma ilə kəsilməzlik arasında əlaqə

Teorem 2. ***$y = f(x)$ funksiyası hər hansı x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa (yəni bu nöqtədə sonlu $f'(x_0)$ törəməsi varsa), bu funksiya həmin nöqtədə həm də kəsilməzdir.***

İsbatı. $y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallaşan oldğundan, onun bu nöqtədə $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ funksiya artımı

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

şəklində ayrılışa malikdir, harada ki, $\alpha(\Delta x)$ funksiyası isə $\Delta x \to 0$ şərtində sonsuz kiçilən funksiyadır: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Bu bərabərlikdə $\Delta x \to 0$ şərti daxilində limitə keçsək

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[A\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x\right]=\lim_{\Delta x\to 0}A\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\left(x(\Delta x)\Delta x\right)=$$
$$=A\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=A\cdot 0+0\cdot 0=0$$

bərabərliyini alarıq ki, funksiyanın kəsilməzliyinin üçüncü tərifinə əsasən, bu $y=f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində kəsilməzliyini ifadə edir. ■

Qeyd edək ki, bu faktın tərsi doğru deyil, yəni kəsilməz funksiyaların heç də hamısı differensiallanan deyil. Məsələn, bütün $x\in(-\infty;+\infty)$nöqtələrində kəsilməz olan

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}\text{x}; & \text{x}>0 \quad \text{olduqda};\\ 0; & \text{x}=0 \quad \text{olduqda};\\ -\text{x}; & \text{x}<0 \quad \text{olduqda};\end{cases}$$

funksiyası $\forall x<0$ qiymətlərində $f'(x)=(-x)'=-1$ törəməsinə, $\forall x>0$ qiymətlərində $f'(x)=(x)'=1$ törəməsinə malik olduğundan, $f'_-(0)=-1\neq 1=f'_+(0)$ şərti ödənir ki, sonuncu şərt də bu funksiyanın $x=0$nöqqəsində törəməsinin olmadığını göstərir.

§ 6. Diferensiallanma qaydaları
(cəmin, fərqin, hasilin və qismətin törəməsi düsturları)

İki funksiyanın cəminin, fərqqinin, hasilinin və qismətinin törəməsi düsturları aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem 3. Əgər $u(x)$və $v(x)$funksiyalarıX çoxluğunun hər hansı x nöqtəsində diferensiallaşırsa (yəni bu nöqtədə sonlu $u'(x)$və $v'(x)$törəmələri varsa), onda $u(x)+v(x)$, $u(x)-v(x)$, $u(x)v(x)$, əlavə $v(x)\neq 0$ şərti daxilində isə $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ funksiyaı da x nöqtəsində diferensiallaşır və onların bu nöqtədə tbrəmələri müvafiq olaraq

$$\left(u(x)+v(x)\right)'=u'(x)+v'(x) \tag{13}$$

$$\left(u(x)-v(x)\right)'=u'(x)-v'(x) \tag{14}$$

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \tag{15}$$

$v(x)\neq 0$ olduqda isə
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \tag{16}$$

düsturları ilə hesablanırlar.

İsbatı. $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ **və** $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$ olduğundan, sadəlik üçün $u(x)=u$, $v(x)=v$ işarə etsək, $u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u=u+\Delta u$, $v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v=v+\Delta v$ alarıq.

$u'(x)=u'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ və $v'(x)=v'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ olduğu nəzərə alsaq, törəmənin tərifinə əsasən

1) $$\left(u(x)+v(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\right)-\left(u(x)+v(x)\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u+\Delta u+v+\Delta v-u-v}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)+v'(x)$$

2) $$\left(u(x)-v(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u(x+\Delta x)-v(x+\Delta x)\right)-\left(u(x)-v(x)\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u+\Delta u-v-\Delta v-u+v}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u-\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}-\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)-v'(x)$$

3) $$\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)\right)-\left(u(x)\cdot v(x)\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{uv+\Delta vu+\Delta uv+\Delta v\Delta u-uv}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

alırıq; burada x nöqtəsində diferensiallanan olmasından həm də kəsilməz olan $v(x)$ funksiyasının $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ şərtini ödəməsi də nəzərə alınmışdır.

4) $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\dfrac{u}{v}}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{uv+\Delta vu-uv+\Delta vu}{v(v+\Delta v)\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u - u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta u}{\Delta x}}{v^2 + v\cdot\Delta v} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v^2 + v\cdot\Delta v\right)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v^2 + \lim\limits_{\Delta x\to 0}(v\cdot\Delta v)} =$$

$$= \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2 + v\cdot 0} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

alırıq; burada x nöqtəsində diferensiallanan olmasından həm də kəsilməz olan $v(x)$ funksiyasının $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$ şərtini ödəməsi də nəzərə alınmışdır. ■

Qismətin törəməsi üçün (16) düsturundan istifadə edərək $y = tgx$ və $y = ctgx$ funksiyalarının törəmələrini hesablasaq,

$$y' = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x + \sin x\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

və

$$y' = (ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

alarıq. Beləliklə, $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ və $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ bərabərlikləri doğrudur.

§ 7. Tərs funksiyanın törəməsi

Fərz edək ki, $(a;b)$ intervalında təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası həmin intervalda ciddi montondur və $(c;d)$ intervalı bu funksiyanın qiymətlər çoxluğudur. Buş ər daxilində $y = f(x)$ funksiyasının $(c;d)$ intervalda təyin olunmuş tərs $x = \varphi(y)$ funksiyası var.

Teorem 4. ***Əgər*** $y = f(x)$ ***funksiyası hər hansı*** x_0 ***nöqtəsində diferensiallanırsa (yəni sonlu*** $f'(x_0)$ ***varsa), onda onun tərs*** $x = \varphi(y)$ ***funksiyası da uyğun*** $y_0 = f(x_0)$ ***nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi***

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{17}$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı: Törəmənin tərifinə əsasən

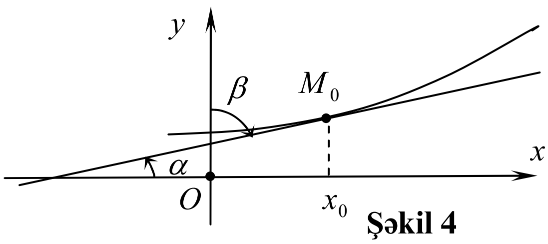
$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində differensiallanan olduğundan, o həm də bu nöqtədə kəsilməzdir, yəni $\Delta x \to 0$ şərti daxilində $\Delta y \to 0$ şərtini ödəyir.Onda sonuncu bərabərlikdən isbatı tələb olunan

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bərabərliyini alırıq.■

$f'(x_0)$ törəməsi, həndəsi olaraq, $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın Ox oxuna α meyl bucağının tangensini, $\varphi'(y_0)$ törəməsi isə bu toxunanın Oy oxuna β meyl bucağının tangensini ifadə etdiklərindən, (17) düsturu bu meyl bucaqlarının cəminin 90°-yəbərabər olduğunu ifadə edir (şəkil 4).



Şəkil 4

(17) düsturunun köməyi ilə bəzi funksiyaların törəmələrini hesablayaq.

1) $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$- üstlü funksiyası $x = \log_a y$ loqarifmik funksiyasının tərsi olduğundan və onun törəməsi $x'(y) = (\log_a y)' = \frac{1}{y \ln a}$ düsturu ilə hesablanır. Tərs funksiyanın törəməsi üçün (17) düsturuna əsasən, verilmiş üstlü funksiyanın törəməsi

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$$

düsturu ilə hesablanır.

Deməli, üstlü funksiyanın törəməsi üçün

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

bərabərliyini aldıq.

Xüsusi halda, $a = e$ qiymətində

$$\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$$

alırıq.

2) $y = \arcsin x$ tərs triqonomktrik funksiyası $x = \sin y$ triqonomktrik funksiyasının tərsi olduğundan və onun törəməsi $x'(y) = (\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ düsturu ilə hesablanır. Tərs funksiyanın törəməsi üçün (17) düsturuna əsasən,verilmiş funksiyanın törəməsi üçün

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

bərabərliyini alırıq.

Deməli, $y = \arcsin x$ tərs triqonomktrik funksiyanın törəməsi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ |x| \le 1$$

düsturu ilə hesablanır.

3) $y = \arccos x$ tərs triqonomktrik funksiyası $x = \cos y$ triqonomktrik funksiyasının tərsi olduğundan və onun törəməsi $x'(y) = (\cos y)' = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y}$ düsturu ilə hesablanır. Tərs funksiyanın törəməsi üçün (17) düsturuna əsasən,verilmiş funksiyanın törəməsi üçün

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

bərabərliyini alırıq.

Deməli, $y = \arccos x$ tərs triqonomktrik funksiyanın törəməsi

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ |x| \le 1$$

düsturu ilə hesablanır.

4) $y = arctgx$ tərs triqonomktrik funksiyası $x = tgy$ triqonomktrik funksiyasının tərsi olduğundan və onun törəməsi $x'(y) = (tgy)' = \frac{1}{\cos^2 y}$ düsturu ilə hesablanır.

$$\frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

triqonometrik eyniliyini də nəzərə alsaq, tərs funksiyanın törəməsi üçün (17) düsturuna əsasən,verilmiş üstlü funksiyanın törəməsi üçün

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

bərabərliyini alırıq.

Deməli, $y = arctgx$ tərs triqonomktrik funksiyanın törəməsi

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

düsturu ilə hesablanır.

5) $y = arcctgx$ tərs triqonomktrik funksiyası $x = ctgy$ triqonomktrik funksiyasının tərsi olduğundan və onun törəməsi $x'(y) = (ctgy)' = -\frac{1}{\sin^2 y}$ düsturu ilə hesablanır.

$$\frac{1}{1+ctg^2 y} = \frac{1}{1+\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = \sin^2 y$$

triqonometrik eyniliyini də nəzərə alsaq, tərs funksiyanın törəməsi üçün (17) düsturuna əsasən,verilmiş üstlü funksiyanın törəməsi üçün

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

bərabərliyini alırıq.

Deməli, $y = arcctgx$ tərs triqonomktrik funksiyanın törəməsi

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

düsturu ilə hesablanır.

§ 8. Əsas elementar funksiyaların törəmələri cədvəli.

$y = C = const$ -sabit funksiyası, $y = x^n$ -qüvvət funksiyası, $y = a^x$, $0 < a \neq 1$ -üstlü funksiyası, $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$-loqarifmik funksiyası, $y = \sin x$. $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ -triqonometrik funksiyaları və $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ -tərs triqonometrik funksiyaları əsas elementar funksiyalar adlanırlar və onların törəmələri, uyğun olaraq

1. $(C)' \equiv 0;$

2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$; xüsusi halda $n = -1$ və $n = \dfrac{1}{2}$ qiymətlərində $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \ \left(0 < a \neq 1\right)$, xüsusi halda $a = e$ qiymətində $\left(e^x\right)' = e^x$;

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} \left(0 < a \neq 1\right)$, xüsusi halda $a = e$ qiymətində $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;

5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$;

6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;

7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| \le 1$;

10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| \le 1$;

11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

12. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

düsturları ilə hesablanırlar.Törəmələrin, yuxarıda göstərilən 1-12 cədvəli **əsas elementar funksiyaların törəmələri cədvəli** adlanır.

§ 9. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi

Tutaq ki, X çoxluğunda təyin olunmuş $u = u(x)$ funksiyası verilmişdir və U çoxluğu bu funksiyanın dəyişmə oblastıdır. U çoxluğunda təyin olunmuş

$y=f(u)$ funksiyasına baxaq. Bu zaman X çoxluğunda təyin olunmuş $y=f(u(x))=F(x)$ mürəkkəb funksiya almış oluruq. Bu mürəkkəb funksiyaların törəməsinin varlığı və hesablanması aşağıdakı teoremlə müəyyən olunur.

Teorem 5. Əgər $u=u(x)$ funksiyası hər hansı x_0 nöqtəsində, $y=f(u)$ funksiyası isə uyğun $u_0=u(x_0)$ nöqtəsində differesiallanırlarsa (yəni sonlu $u'(x_0)$ və $f'(u_0)$ törəmələri varsa) onda mürəkkəb $y=f(u(x))=F(x)$ funksiyası da x_0 nöqtəsində differesiallanandır və onun törəməsi üçün

$$y'(x_0)=f'(u_0)\cdot u'(x_0) \tag{18}$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. $u=u(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi olduğundan

$$u'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

$y=f(u)$ funksiyası da $u_0=u(x_0)$ nöqtəsində differesiallanan olduğundan, onun bu nöqtədə funksiya artımı

$$\Delta y=f'(u_0)\cdot\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u \tag{19}$$

ayrılışına malikdir, harda ki, $\alpha(\Delta u)$ funksiyası $\Delta u\to 0$ şərti daxilində sonsuz kiçilən funksiyadır: $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0$.

(19) ayrılışının hər tərəfini Δx-ə bölüb, $\Delta x\to 0$ şərtində limitə keçsək

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u_0)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u_0)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]+\lim_{\Delta x\to 0}\left[\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=$$

$$=f'(u_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}[\alpha(\Delta u)]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u_0)\cdot u'(x_0)+u'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}(\alpha(\Delta u))$$

alarıq.

$u=u(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində differensiallanan olduğundan, o həm də bu nöqtədə kəsilməzdir, yəni $\Delta x\to 0$ şərti daxilində $\Delta u\to 0$ şərtini ödəyir.Onda sonuncu bərabərlikdən isbatı tələb olunan

$$y'(x_0)=f'(u_0)\cdot u'(x_0)+u'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)=f'(u_0)\cdot u'(x_0)+u'(x_0)\lim_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=$$

$$=f'(u_0)\cdot u'(x_0)+0\cdot u'(x_0)=f'(u_0)\cdot u'(x_0)$$

(19) düsturunu alırıq.■

Çalışmaların həlli zamanı, x_0 və $u_0 = u(x_0)$ nöqtələrni qeyd etməməklə, mürəkkəb $y = f(u)$ funksiyasının törəməsi üçün (19) düsturu

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

şəklində istifadə olunur.

§ 10. Mürəkkəb funksiyaların törəmələri düsturları

Əsas elementar funksiyaların superpozisiyalarından düzəldilmiş mürəkkəb funksiyaların törəmələrini hesablayarkən,mürəkkəb funksiyanın törəməsi üçün (19) düstutundan istifadə olunur. Bu halda əsas elementar funksiyaların törəmələri cədvəli aşağıdakı şəklə düşür:

1. $(C)' \equiv 0$;

2. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$; xüsusi halda $n = -1$ və $n = \dfrac{1}{2}$ qiymətlərində $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3. $\left(a^u\right)' = a^u u' \ln a \;\; (0 < a \neq 1)$, xüsusi halda $a = e$ qiymətində $\left(e^u\right)' = e^u u'$;

4. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \;\; (0 < a \neq 1)$, xüsusi halda $a = e$ qiymətində $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

5. $(\sin u)' = u' \cos u$;

6. $(\cos u)' = -u' \sin u$;

7. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

8. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

9. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $|u| \leq 1$;

10. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $|u| \leq 1$;

11. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

12. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

§ 11. Loqarifmik törəmə anlayışı

Fərz edək ki, hər hansı X soxluğunda təyin olunmuş $y = y(x)$ funksiyası $\forall x \in X$ qiymətində $y(x) > 0$ şərtini ödəyir. Onda $z = z(x) = \ln y(x)$ funksiyasının $\forall x \in X$ qiymətində törəməsi var və bu törəmə $z'(x) = [\ln y(x)]' = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$ düsturu ilə hesablanır. $z'(x)$ törəməsi verilmiş $y(x)$ funksiyasının **loqarifmik törəməsi** adlanır.

Bəzi praktiki məsələlərin həllində həm əsasında, həm də üstündə sərbəst dəyişənin iştirak etdiyi üstlü funksiyanın törəməsini hesablamaq lazım gəlir. Belə hallarda funksiyaların loqarifmik törəməsi anlayışından istifadə olunur.

$f(x) > 0$ şərtini ödəyən $y = [f(x)]^{g(x)}$ funksiyasının törəməsini hesablamaq üçün, $z = \ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$ funksiyasının törəməsini hesablayaq. Hasilin və mürəkkəb funksiyanın törəməsi düsturlarından istifadə etməklə

$$z' = \frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \ ,$$

buradan isə verilmiş $y = [f(x)]^{g(x)}$ funksiyasının y' törəməsi üçün

$$y' = y\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = [f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

bərabərliyini alırıq.

$x > 0$ olduqda $y = x^x$ funksiyasının törəməsini hesablamaq üçün $z = \ln y = \ln x^x = x\ln x$ funksiyasının törəməsini hesablayaq. Hasilin və mürəkkəb funksiyanın törəməsi düsturlarından istifadə etməklə

$$z' = \frac{y'}{y} = (x\ln x)' = (x)'\ln x + (\ln x)'x = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1 + \ln x\,,$$

buradan isə verilmiş $y = x^x$ funksiyasının y' törəməsi üçün

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

bərabərliyini alırıq.

§ 12. Yüksək tərtibli törəmə və diferensial anlayışları

Fərz edək ki, hər hansı X çoxluğunda təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası bu çoxluqda diferensiallanandır, yəni, bu çoxluğun hər bir x

nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının sonlu $f'(x)$ törəməsi var. x dəyişdikcə $f'(x)$ törəməsinin qiyməti dəyişdiyindən, $f'(x)$ törəməsinin özü də x dəyişənin funksiyasıdir. $g(x) = f'(x)$ ilə işarə edək.

Əgər $g(x)$ funksiyasın da x nöqtəsində sonlu $g'(x)$ törəməsi varsa, bu törəmə verilmiş $f(x)$ funksiyasının ikinci tərtib törəməsi (və ya qısaca ikinci törəməsi) adlanır və $f''(x)$ ilə işarə olunur:

$$f''(x) = g'(x) = (f'(x))'$$

Beləliklə, verilmiş funksiyası birinci tərtib törəməsinin törəməsi kimi funksiyanın ikinci tərtib törəməsini daxil etdik. Analoji qayda ilə funksiyanın ikinci tərtib törəməsinin törəməsi kimi funksiyanın üçüncü tərtib $f'''(x)$ törəməsini və s. $(n-1)$-ci tərtib $f^{(n-1)}(x)$ törəməsinin törəməsi kimi (əgər bu törəmə varsa) funksiyanın n-ci tərtib $f^{(n)}(x)$ törəməsini daxil edə bilərik.

Ümumiyyətlə, funksiyası yüksək tərtibli hər hansı törəməsinin hesablamaq üçün bu tərtibdən əvvəl gələn bütün tərtibli törəməsini hesablamaq lazım gəlir. Lakin elə funksiyalar var ki, istənilən n-ci tərtib törəməsini hesablamaq üçün rekurent düsturunu əldə etmək mümkündür. Belə funksiyalardan bəziləri ilə tanış olaq.

I. α tam ədəd olduqda $f(x) = x^{\alpha}$ qüvvət funusiyasına baxaq.

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)' = \alpha\left(x^{\alpha-1}\right)' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = \left[\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right]' = \alpha(\alpha-1)\left(x^{\alpha-2}\right)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \text{ və s.}$$

$$f^{(\alpha-1)}(x) = \left(f^{(\alpha-2)}(x)\right)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-\alpha+2)x^{\alpha-\alpha+1} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 2x,$$

$$f^{(\alpha)}(x) = \left(f^{(\alpha-1)}(x)\right)' = \left[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 2x\right]' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 2\cdot 1 = \alpha! = const.$$

α tərtibli $f^{(\alpha)}(x) = const$ olduğundan, bu funksiyanın α-dan yüksək tərtibli törəmələri sıfıra bərabərdirlər:

$$f^{(\alpha+1)}(x) = f^{(\alpha+2)}(x) \ldots\ldots\ldots f^{(n)}(x) = 0.$$

Deməli $f(x) = x^{\alpha}$ qüvvət funusiyasının n-cı tərtib törəməsi üçün

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-n} & , n\le\alpha \text{ olduqda;}\\ 0 & , n>\alpha \text{ olduqda}\end{cases}$$

rekurent düsturunu alırıq.

II. $f(x)=a^x$ ($0<a\neq 1$) üstlü funksiyası.

$$f'(x)=\left(a^x\right)'=a^x\ln a,$$

$$f'(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(a^x\ln a\right)'=\left(a^x\right)'\ln a=a^x\cdot\ln a\cdot\ln a=a^x\ln^2 a,$$

$$f'''(x)=\left(f''(x)\right)'=\left(a^x\ln^2 a\right)'=\left(a^x\right)'\ln^2 a=a^x\cdot\ln a\cdot\ln^2 a=a^x\ln^3 a, \text{ və s.}$$

$$f^{(n)}(x)=a^x\ln^n a$$

olduğundan, $f(x)=a^x$ ($0<\mathrm{a}\neq 1$) üstlü funusiyasının n-cı tərtib törəməsi üçün $f^{(n)}(x)=a^x\ln^n a$ rekurent düsturunu alırıq.

III. $f(x)=\sin x$

$$f'(x)=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=(\cos x)'=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x)=\left(f''(x)\right)'=(-\sin x)'=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=\left(f'''(x)\right)'=(-\cos x)'=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right) \text{ və s.}$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

olduğundan, $f(x)=\sin x$ triqonometrik funusiyasının n-cı tərtib törəməsi üçün $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ rekurent düsturunu alırıq.

Analoji yolla

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ (tgx)^{(n)}=tg\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ (ctgx)^{(n)}=ctg\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

rekurent düsturlarını da göstərmək olar.

Funksiyanın differensialı anlayışı öyrənərkən göstərmişdik ki, differensiallanan funksiyanın differensialı onun törəməsinin sərbəst dəyişənin differensialına hasilinə bərabərdir.

Törəmə anlayışında olduğu kimi, differensial anlayışında da funksiyanın daha yüksək tərtibli diferensialı anlayışını daxil etmək olar.

$y = f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində differensialının həmin nöqtədə diferensialı (əgər bu diferensial varsa) funksiyasının həmin nöqtədə ikinci tərtib (və ya qısaca ikinci) dşfferensialı adlanır və d^2y kimi işarə olunur.

$dy = f'(x)dx$ olduğundan, funksiyasının ikinci tərtib d^2y dşfferensialı üçün

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\cdot dx) = d(f'(x))dx = (f'(x))'\,dx\cdot dx = f''(x)dx^2$$

ifadəsi alırıq.

Analoji qayda ilə funksiyanın ikinci tərtib d^2y differensialının diferensialı kimi funksiyanın üçüncü tərtib d^3y diferensialını, üçüncü tərtib d^3y differensialının diferensialı kimi dördüncü tərtib d^4y diferensialını və s. $(n-1)$-ci tərtib $d^{n-1}y$ differensialının diferensialı kimi (əgər bu diferensial varsa) n-ci tərtib d^ny diferensialını daxil etmək olar.

$y = f(x)$ funksiyasının yüksək tərtibli diferensialları üçün

$$d^3y = d(d^2y) = d\left(f''(x)(dx)^2\right) = d(f''(x))(dx)^2 = (f''(x))'\,dx\cdot(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3,$$

$$d^4y = d(d^3y) = d\left(f'''(x)(dx)^3\right) = d(f'''(x))(dx)^3 = (f'''(x))'\,dx\cdot(dx)^3 = f^{(\mathrm{IV})}(x)(dx)^4,$$

və sairə

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

bərabərlikləri doğrudur. Buradan $y = f(x)$ funksiyasının yüksək tərtibli törəmələri üçün

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},\ f''(x) = \frac{d^2y}{(dx)^2},\ f'''(x) = \frac{d^3y}{(dx)^3},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}$$

bərabərliklərini alırıq ki, törəmənin bu işarələmələrindən növbəti mövzularda geniş istifadə olunacaq.

§ 13. İki funksiyanın hasilinin yüksək tərtibli törəmələrinin hesablanması üçün Leybniç düsturu

Fərz edək ki, hər hansı X çoxluğunda təyin olunmuş, differensiallanan $u = u(x)$ və $v = v(x)$ funksiyaları verilmişdir. Bu funksiyaların hasilinin törəməsi üçün

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{20}$$

düsturu məlumdur. Əgər bu iki funksiyanın hasilinin törəməsindən ibarət funksiya da differensiallanandırsa, onda onun sonlu törəməsi var və hasilin 2-ci tərtib törəməsi adlanan bu törəmə üçün

$$(uv)'' = \left[(uv)'\right]' = [u'v + uv']' = (u'v)' + (uv')' = (u')'v + u'v' + u(v')' =$$

$$= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'' \tag{21}$$

bərabərliyini alarıq.

Əgər 2-ci tərtib bu törəmənin də sonlu törəməsi varsa, hasilin 3-cü tərtib törəməsi adlanan bu törəmə üçün isə

$$[uv]''' = \left[(uv)''\right]' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u''v)' + (2u'v')' + (uv'')' = (u'')'v + u''v' +$$

$$+ 2\left[(u')'v' + u'(v')'\right] + u'v'' + u(v'')' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$

$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \tag{22}$$

bərabərliyini alırıq.

(20), (21), (22) düsturlarından görünür ki, bu düsturlar Nyuton binomunun

$$(a+b)^1 = a + b = a^1b^0 + a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3$$

düsturlarının ilə analoqlarıdırlar. Nyuton binomunun ümumi şəkildə

$$(a+b)^n = C_n^0a^nb^0 + C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^ka^{n-k}b^k + \cdots + C_n^{n-1}a^1b^{n-1} + C_n^na^0b^n =$$

$$= a^nb^0 + n\cdot a^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\cdot a^{n-k}b^k + \cdots + n\cdot a^1b^{n-1} + a^0b^n$$

düsturuna analoji, iki funksiyanın hasilinin n-ci tərtib törəməsi üçün

$$(uv)^{(n)} = C_n^0u^{(n)}v + C_n^1u^{(n-1)}v' + C_n^2u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + C_n^nuv^{(n)} =$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

düsturunu alarıq ki, bu düstur Leybniç düsturu adlanır.

§ 14. Differensial hesablamanın əsas teoremləri

$(a;b)$ intervalında təyin olunmuş və $(a;b)$ intervalının hər bir x nöqtəsində diferensiallanan $f(x)$ funksiyası $(a;b)$ **intervalında diferensiallanan funksiya** adlanır.

$[a;b]$ parçasında təyin olunmuş:

1) bu parçasının daxilində, yəni $(a;b)$ intervalında diferensiallanan;

2) parçanın sol ucü olan a nöqtəsində sonlu sağ $f'_+(a)$ törəməsi ;

3) parçanın sağ ucü olan b nöqtəsində sonlu sol $f'_-(b)$ törəməsi

olan $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ **parçasında diferensiallanan funksiya** adlanır.

Ferma teoremi. $(a;b)$ ***intervalında diferensiallanan*** $y=f(x)$ ***funksiyası*** $(a;b)$ ***intervalından olan hər hansı*** x_0 ***nöqtəsində özünün ən böyük, yaxud ən kiçik qiymətini alırsa və bu nöqtədə funksiyanın törəməsi varsa, onda o törəmə sıfıra bərabərdir:*** $f'(x_0)=0$**.**

İsbatı. Teoremin isbatını $y=f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində özünün ən böyük qiymətini aldığı halda göstərək. $y=f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində ən kiçik qiymət aldığı halda teorem analoji qayda ilə isbat olunur.

Fərz edək ki, $y=f(x)$ funksiyası $x_0 \in (a;b)$ nöqtəsində özünün ən böyük qiymətini alır. Yəni $\forall x \in (a;b)$ qiymətində $f(x) \le f(x_0)$ və ya $f(x)-f(x_0) \le 0$ şərti ödənir. Onda x_0 nöqtəsində Δy funksiya artımı $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \le 0$ olduğundan, $\Delta x<0$ qiymətlərində $\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$, $\Delta x>0$ qiymətlərində isə $\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$ şərtləri ödənəcək.

Bərabərsizliklərdə limit əməliyyatını nəzərə almaqla, x_0 nöqtəsində $y=f(x)$ funksiyasının sol və sağ törəmələri

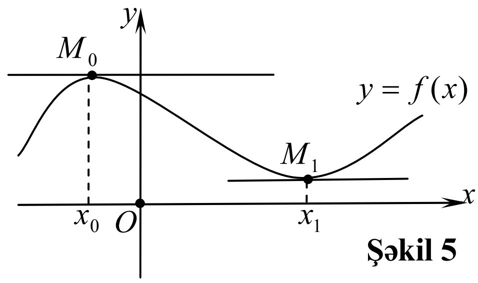
$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$$

və

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$$

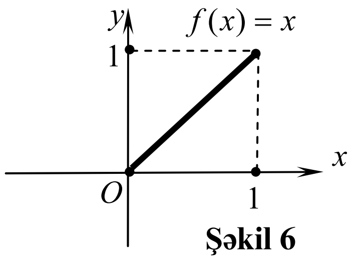
bərabərsizliklərini ödəməlidirlər. $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində $f'(x_0)$ törəməsi varsa, onda $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ barabərliyi ödənməlidir. Bu bərabərlik isə yalnız $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$ qiymətlərində mümkündür ki, bu halda da $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$ olacaq.■

Ferma teoremi həndəsi olaraq onu göstərir ki, əgər $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində özünün ən böyük yaxud ən kiçik qiymətini alırsa və funksiyanın qrafiki üzərində absisi x_0 olan nöqtədə bu qrafikə toxunan çəkmək olarsa, bu toxunan absis oxuna parallel olmalıdır (şəkil 5).



Şəkil 5

Qeyd edək ki, Ferma teoremtnin şərtində $(a;b)$ intervalını $[a;b]$ parçası ilə əvəz etdikdə teoremin hökmü doğru olmayacaq. Belə ki, $f(x) = x, x \in [0;1]$ funksiyası ən böyük qiymətini $[0;1]$ parçasının $x = 1$ nöqtəsində, ən kiçik qiymətini isə $x = 0$ nöqtəsində almasına baxmayaraq, $[0;1]$ parçasının bütün nöqtələrində $f'(x) = (x)' = 1 \neq 0$ şərti ödənəcək (şəkil 6).



Şəkil 6

Roll teoremi. $[a;b]$ ***parçasında təyin olunmuş*** $y = f(x)$ ***funksiyası***

1. $[a;b]$ ***parçasında kəsilməz;***

2. $(a;b)$ ***intervalında diferensiallanan;***

3. $[a;b]$ ***parçasının uc nöqtəsində bərabər*** $f(a) = f(b)$ ***qiymətləri alırsa, onda*** $[a;b]$ ***parçasının daxilində elə*** $c \in (a;b)$ ***nöqtəsi var ki,*** $f'(c) = 0$ ***olacaq.***

İsbatı. $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməz olduğundan o, bu parçada özünün ən böyük və ən kiçin qiymətlərini alır, yəni $\exists x_1, x_2 \in [a;b]$ nöqtələri var ki, $f(x_1) = m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$, $f(x_1) = m = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ və $\forall x \in [a;b]$ qiymətlərində $m \le f(x) \le M$ bərabərsizliyi ödənir.

Aşağıdakı hallar mümkündür:

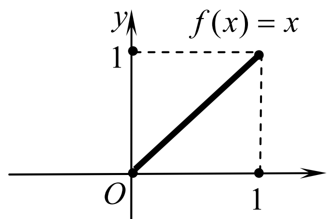
I. $m = M$;

II $m < M$.

I. Bu halda $\forall x \in [a;b]$ qiymətlərində $m \le f(x) \le m$ olduğundan, $f(x) \equiv m = const$, $f'(x) \equiv 0$ olacaq. Yəni Roll teoreminin hökmü tək bir $c \in (a;b)$ nöqtəsində deyil, $\forall x \in (a;b)$ qiymətlərində ödənəcək.

II. $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasının uc nöqtəsində bərabər $f(a) = f(b)$ qiymətləri aldığından, o ən kiçik m və ya ən böyük M qiymətlərindən heç olmazsa birini $[a;b]$ parçasının daxilində, yəni $(a;b)$ intervalında alır ki, Ferma teoreminə əsasən, bu halda elə $c \in (a;b)$ nöqtəsi var ki, $f'(c) = 0$ olur. Beləliklə bu halda da Roll teoreminin hökmü ödənir.■

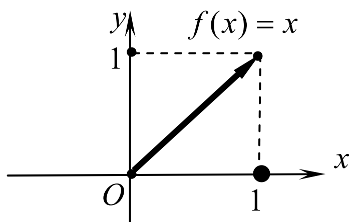
Qeyd edək ki, Roll teoreminin hər üç şərti oduqca vacibdir və bu şərtlərdən hər hansı birinin pozulması teoremin hökmünün ödənməməsinə gətirib çıxarır. Məsələn, $f(x) = x$, $x \in [0;1]$ (şəkil 7) funksiyası Roll teoreminin 1-ci və2-ci şərtlərini ödədiyi halda 3-cü şərtini ödəmir. Odur ki,bu funksiya üçün Roll teoremin hökmü ödənmir, belə ki, $\forall x \in [0;1]$ qiymətində $f'(x) = (x)' = 1 \neq 0$ olur.



Şəkil 7

Yaxud

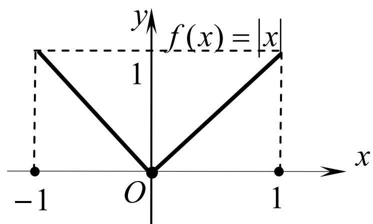
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \text{ qiymətlərində;} \\ 0, & x = 1 \quad \text{qiymətində} \end{cases}$$



Şəkil 8

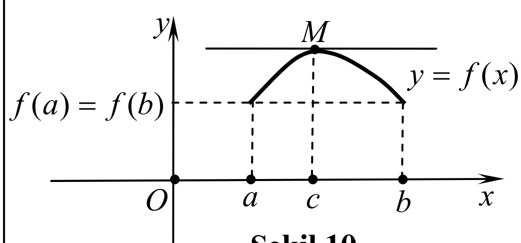
(şəkil 8) funksiyası Roll teoreminin 2-ci və 3-cü şərtlərini ödədiyi halda 1-ci şərtini ödəmir. Odur ki,bu funksiya üçün Roll teoremin hökmü ödənmir, belə ki, $\forall x \in (0;1)$ qiymətində $f'(x) = (x)' = 1 \neq 0$ olur.

$f(x) = |x|$, $x \in [-1;1]$ funksiyası (şəkil 9) $x = 0$ nöqtəsində diferensiallanan olmadığından, Roll teoreminin 1-ci və3-cü şərtlərini ödədiyi halda 2-ci şərtini ödəmir. Odur ki,bu funksiya üçün Roll teoremin hökmü ödənmir, belə ki, $\forall x \in (-1;0)$ qiymətində $f'(x) = (-x)' = -1 \neq 0$, $\forall x \in (0;1)$ qiymətində isə $f'(x) = (x)' = 1 \neq 0$ olur; $x = 0$ nöqtəsində isə diferensiallanan olmadığından, bu funksiyannın törəməsi yoxdur.



Şəkil 9

Roll teoremi həndəsi olaraq onu göstərir ki, bu teoremin şərtlərini ödəyən $f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində elə $M(c;f(c))$ nöqtəsi var ki, bu nöqtədə funksiya qrafikinə çəkilmiş toxunan absis oxuna parallel olacaq (şəkil 10).



Şəkil 10

Laqranj teoremi: $[a;b]$ ***parçasında təyin olunmuş*** $y = f(x)$ ***funksiyası***

1. $[a;b]$ ***parçasında kəsilməz;***

2. $(a;b)$ ***intervalında diferensiallanandırsa,*** $[a;b]$ ***parçasının daxilində elə*** $c \in (a;b)$ ***nöqtəsi var ki,***

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{23}$$

olacaq.

İsbatı. Kömsəkçi

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{24}$$

funksiyası daxil edək.

(24) bərabərliyindən göründüyü kimi, $[a;b]$parçasında kəsilməz iki $f(x) - f(a)$və $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ funksiyalarının fərqi kimi, $F(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməz, $(a;b)$ intervalında diferensiallanan iki $f(x) - f(a)$və $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ funksiyalarının fərqi kimi $(a;b)$ intervalında diferensiallanan funksiyadır. Bundan əlavə, (24) bərabərliyindən

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 - 0 = 0$$

və

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

şərtləri ödənir. Yəni, $F(x)$ funksiyası Roll teoreminin hər üç şərtini ödəyir. Roll teoreminə əsasən, elə $c \in (a;b)$ var ki, $F'(c) = 0$ olacaq. Digər tərəfdən, (24) bərabərliyinə əsasən

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olduğundan,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

buradan isə, isbatı tələb olunan

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bərabərliyini alırıq.■

Çox zaman (23) düsturunu

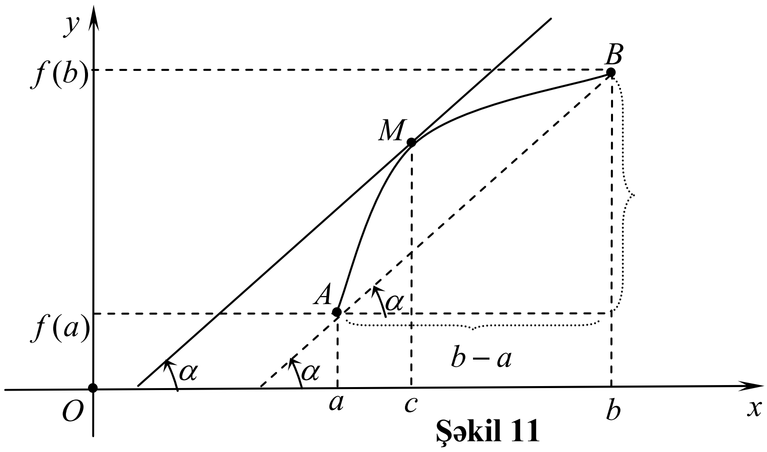
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{25}$$

və ya $b = x + \Delta x$, $a = x$ işarə etməklə

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \cdot \Delta x \tag{26}$$

şəklində ifadə edib Laqranjın sonlu artım düsturu adlandırırlar.

Laqranj teoremi həndəsi olaraq onu göstərir ki, $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməz, $(a;b)$ intervalında diferensiallanandırsa, onda $f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində elə $M(c; f(c))$ nöqtəsi var ki, bu nöqtədə funksiya qrafikinə çəkilmiş toxunan bu qafikin $A(a; f(a))$ və $B(b; f(b))$ nöqtələrini gərən vətərə parallel olacaq (şəkil 11).



Şəkil 11

Koşi teoremi. ***$[a;b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları***

1. $[a;b]$ parçasında kəsilməz;

2. $(a;b)$ intervalında diferensiallanandırlarsa və $\forall x \in (a;b)$ qiymətində $g'(x) \neq 0$ şərtini ödəyirsə, onda $[a;b]$ parçasının daxilində elə $c \in (a;b)$ nöqtəsi var ki, bu nöqtədə

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{27}$$

bərabərliyi ödənir.

İsbatı. Əvvəlcə Koşi teoreminin şərtləri daxilində $g(b)-g(a)\neq 0$ olduğunu göstərək.Əksini fərz edək.Fərz edək ki, Koşi teoreminin şərtləri daxilində $g(b)-g(a)=0$ bərabərliyi ödənir. $g(x)$ funksiyası özü ayrılıqda $[a;b]$ parçasında Laqranj teoreminin şərtlərini ödədiyindən ($g(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməz, $(a;b)$ intervalında diferensiallanandır), Laqranjın sonlu artımı üçün (25) düsturuna əsasən, elə $c\in(a;b)$ nöqtəsi var ki, $g(b)-g(a)=g'(c)(b-a)=0$ bərabərliyi ödənməlidir. $b-a\neq 0$ olduğundan sonuncu bərabərlik yalnız $g'(c)=0$ olduqda ödənməlidir ki, bu da Koşi teoreminin $\forall x\in(a;b)$ qiymətində $g'(x)\neq 0$ şərtinə ziddir. Deməli $g(b)-g(a)=0$ ola bilməz, $g(b)-g(a)\neq 0$ olmalıdır.

Beləliklə (27) bərabərliyinin hər iki tərəfinin mənası olduğunu göstərdik. İndi isə (27) bərabərliyinin bilavasitə isbatına keçək.

Kömsəkçi

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] \tag{28}$$

funksiyası daxil edək.

(28) bərabərliyindən göründüyü kimi, $[a;b]$ parçasında kəsilməz iki $f(x)-f(a)$ və $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$ funksiyalarının fərqi kimi, $\Phi(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməz, $(a;b)$ intervalında diferensiallanan iki $f(x)-f(a)$ və $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$ funksiyalarının fərqi kimi $(a;b)$ intervalında diferensiallanan funksiyadır. Bundan əlavə, (28) bərabərliyindən

$$\Phi(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(a)-g(a)]=0-0=0$$

və

$$\Phi(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=f(b)-f(a)-(f(b)-f(a))=0$$

şərtləri ödənir. Yəni, $\Phi(x)$ funksiyası Roll teoreminin hər üç şərtini ödəyir. Roll teoreminə əsasən, elə $c\in(a;b)$ var ki, $\Phi'(c)=0$ olacaq. Digər tərəfdən, (28) bərabərliyinə əsasən

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olduğundan,

$$\Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0,$$

buradan isə, isbatı tələb olunan

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

bərabərliyini alırıq.■

Törəmənin tətbiqləri.

§ 15. Qeyri-müəyyənliklərin açılması. Lopital qaydası

$\frac{0}{0}$ **şəklində qeyri-müəyyənliyin açılması.** Fərz edək ki, a nöqtəsi isə X çoxluğunun limit nöqtəsi, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları isə ola bilsin ki, a nöqtəsinin özündən başqa X çoxluğunun qalan nöqtələrində təyin olunmuş funksiyalardırlar. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ şərtini ödəyən iki funksiyanın nisbətinin $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitini $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənlik adlandıracağıq.

Bu qeyri müəyyənliyi açmaq- $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitinin varlığını və yoxluğunu müəyyən etmək, bu limit olduqda isə onu hesablamaqdır.Aşağıdakı teorem $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənliyin açılması üçün qayda müəyyən edir.

Lopital teoremi. ***Tutaq ki,*** $f(x)$ ***və*** $g(x)$ ***funksiyaları*** a ***nöqtəsinin müəyyən ətrafınnda, ola bilsin ki, bu nöqtənin özündən başqa qalan nöqtələrdə təyin olunmuş, diferensiallanan və*** a ***nöqtəsinin göstərilən ətrafınndan olan nöqtələr üçün*** $g'(x) \neq 0$ ***və*** $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ***şərtlərini ödəyən funksiyalardır. Əgər törəmələrin nisbətinin*** $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ***limiti varsa (sonlu və ya sonsuz),onda onların öz nisbətlərinin*** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ***limiti də var və***

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{29}$$

düsturu doğrudur.

İsbatı. a nöqtəsinin göstərilən ətrafınndan olan istənilən x qiyməti götürək və müəyyənlik üçün teoremin isbatını $x>a$ qiyməti üçün aparaq. $x<a$ qiymətində teorem analoji yolla isbat olunur.

$f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları a nöqtəsində təyin olunmadığından funksiyaları a nöqtəsinə kəsilməz olaraq tamamlayaq.Köməkçi

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a \text{ olduqda;}\\ 0\ , & x=a \text{ olduqda}\end{cases} \text{ və } G(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq a \text{ olduqda;}\\ 0\ , & x=a \text{ олдугда}\end{cases}$$

funksiyaları daxil edək. $F(x)$ və $G(x)$ funksiyaları

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}f(x)=0=F(a) \quad \text{və} \quad \lim_{x\to a}G(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0=G(a)$$

şərtlərini ödəndiklərindən, a nöqtəsində, o cümlədən $[a;x]$ parçasında kəsilməz, $(a;x)$ intervalında isə differensiallanandırlar və $G'(x)=g'(x)\neq 0$ şərti ödənir. Deməli, $F(x)$ və $G(x)$ funksiyaları Koşi teoreminin şərtlərini ödəyirlər. Odur ki, Koşi teoreminə əsasən,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(c)}{G'(c)}$$

bərbərliyi ödənir; burada c nöqtəsi $(a;x)$ intervalından olan, yəni $a<c<x$ şərtini ödəyən hər hansı nöqtədir. Aralıq funksiyanın limiti haqqında teoremə əsasən, $x\to a$ şərtində $c\to a$ şərti ödənəcək.Bunu sonuncu bərabərlikdə nəzərə alıb, c dəyişənini x dəyişəni ilə əvəz etsək, isbatı tələb olunan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(c)}{G'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{F'(c)}{G'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

bərabərliyini alarıq.■

İsbat edilən bu teoremi, adətən **Lopital qaydası** adlandırırlar.

Qeyd 1. Əgər $f'(x)$ və $g'(x)$ törəmələri $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının özlərinə qoyulan tələbləri ödəyirlərsə, onda Lopital qaydasını təkrar tətbiq etmək olar və bu halda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} \tag{30}$$

düsturunu almış olarıq.

Qeyd 2. $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ şərtlərində də Lopital teoremi öz gücündə qalır. Doğrudan da $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ şərtlərini ödəyən funksiyaların törəmələrin nisbətinin $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti (sonlu və ya sonsuz) varsa, $x = \frac{1}{t}$ əvəzləməsi aparmaqla $x \to \infty$ şərtində $t \to 0$ **və** $f(x) = f(1/t) \to 0$, $g(x) = g(1/t) \to 0$ alırıq. Mürəkkəb funsiyaların diferensiallanma qaydalarını $f(1/t)$ və $g(1/t)$ funsiyalarına tətbiq etsək, Lopital teoreminə əsasən,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

alırıq.

$\frac{\infty}{\infty}$ **şəklində qeyri-müəyyənliyin açılması.** $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ($-\infty$ və ya $+\infty$) şərtini ödəyən iki funksiyanın nisbətinin $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitini $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənlik adlandıracağıq.

Bu qeyri-müəyyənliyin açılması üçün də Lopital teoreminə analoji hökm var və aşağıdakı şəkildə ifadə olunur.

Teorem 6. ***Tutaq ki,*** $f(x)$ ***və*** $g(x)$ ***funksiyaları*** a ***nöqtəsinin müəyyən ətrafınnda, ola bilsin ki, bu nöqtənin özündən başqa qalan nöqtələrdə təyin olunmuş, diferensiallanan və*** a ***nöqtəsinin göstərilən ətrafınndan olan nöqtələr üçün*** $g'(x) \neq 0$ ***və*** $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ***(*** $-\infty$ ***və ya*** $+\infty$ ***) şərtlərini ödəyən funksiyalardır. Əgər törəmələrin nisbətinin*** $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ***limiti (sonlu və ya sonsuz) varsa, onda onların öz nisbətlərinin*** $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ***limiti də var və***

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{31}$$

düsturu doğrudur.

Digər qeyri-müəyyənliklərin açılması. $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 şəklində qeyri-müəyyənlikləri əvzləmə yolu ilə $\frac{0}{0}$ və $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənliklərə gətirmək olar.

§ 16. Teylor düsturu.

İndi isə riyazi analizin həm analizin özündə, həm də ounla qarışıq fənlərdə çoxsaylı tətbiqləri olan əsas düstularından biri ilə tanış olaq.

Teylor düsturu. Teylor teoremi. ***Əgər*** $f(x)$ ***hər hansı*** a ***nöqtəsinin özü və onun müəyyən ətrafında*** $(n+1)$ ***-ci tərtibə qədər törəməsi olan funksiyadırsa,*** x ***isə göstərilən ətrafdan olan*** $x\neq a$ ***istənilən nöqtədirsə, onda*** a ***və*** x ***nöqtələri arasında elə*** ξ ***nöqtəsi var ki,***

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (32)$$

düsuru doğrudur.

İsbatı. $T_n(x;a)$ ilə (32) düsturunun sağ tərəfində duran x-ə nəzərən n dərəcəli çoxhədlini, yəni

$$T_n(x;a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (33)$$

işarə edək. Sonra $R_{(n+1)}(x)$ ilə

$$R_{(n+1)}(x)=f(x)-T_n(x;a)$$

fərqini işarə edək.

$$R_{(n+1)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ a<\xi<x \qquad (34)$$

bərabərliyini göstərməklə teoremi isbat etmiş oluruq.

a nöqtəsinin göstərilən ətrafından istənilən x qiymətini qeyd edək və müəyyənlik üçün $x>\mathrm{a}$ qəbul edək. t ilə $a\le t\le x$ parçasında qiymətlər alan dəyişən kəmiyyəti işarə edək və $[a;b]$ parçasında köməkçi

$$F(t)=f(x)-T_n(x;t)-\frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} \qquad (35)$$

funksiyasına baxaq.

$F(t)$ funksiyası $[a;x]$ parçasında Roll teoreminin bütün şərtlərini ödəyir.

1.(35) düsurundan və $f(x)$ funksiyası üzərinə qoyulmuş şərtlərdən $F(t)$ funksiyasının $[a;x]$ parçasında kəsilməzliyi və diferensiallanan olması alınır.

2. (35) düsurunda $t=a$ götürməklə

$$F(a)=f(x)-T_n(x;a)-\frac{(x-a)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=f(x)-\varphi(x;a)-R_{n+1}(x)=R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x)=0,$$

$t=x$ götürməklə

$$F(x)=f(x)-f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(x-x)+\frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n-\frac{(x-x)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0$$

alırıq. Yəni Roll teoreminin $F(a)=F(x)$ şərti də ödənir. Roll teoreminə əsasən $[a;x]$ parçasının daxilində elə ξ nöqtəsi var ki, bu nöqtədə

$$F'(\xi)=0$$

bərabərliyi ödənir.

(35) bərabərliyini t-yə görə diferensiallamaqla, $F'(t)$ törəməsi üçün

$$F'(t)=-f'(t)+\frac{f'(t)}{1!}-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}-$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

ifadəsi alarıq. Bu bərabərlikdə $t=\xi$ qiymətini nəzərə alsaq,

$$F'(\xi)=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n-\frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0,$$

buradan isə

$$R_{(n+1)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

alarıq.■

(32) düsturu **Teylor düsturu**, (33) bərabərliyi ilə təyin olunan $T_n(x;a)$ çoxhədlisi $f(x)$ funksiyasının a **nöqtəsində** n**-ci dərəcədən Teylor çoxhədlisi,** (34) bərabərliyi ilə təyin olunan $R_{(n+1)}(x)$ Teylor düsturunda **Larqanj tipli qalıq hədd** adlanır.

Qalıq həddi digər formada ifadə edək. $\xi\in(a;x)$ olduğundan, $0<\theta<1$ intervalından elə θ ədədi tapmaq olar ki, $\xi=a+\theta(x-a)$ olar. Bu halda qalıq hədd tətbiqlərdə daha çox istifadə olunan

$$R_{(n+1)}(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \ , \ 0<\theta<1$$

şəklini alır.

Teylor düsturunun və qalıq həddin digər ifadələri. $a=x_0$, $x-a=\Delta x$, $x=x_0+\Delta x$ işarə etməklə (32) Teylor düsturunu daha tez-tez istifadə olunan

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

şəkildə ifadə etmək olar. $n=0$ qiymətində bu bərabərlikdən

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

Laqranj düsturu alınır.

$f^{(n)}(x)$ funksiyası a nöqtəsinin ətrafınnda məhduddursa

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)=0$$

olduğundan, $x\to a$ şərtində qalıq hədd

$$R_{(n+1)}(x)=o\left[(x-a)^n\right], \ x\to a \qquad (36)$$

sonsuz kiçilən funksiyadır.

(34) bərabərliyi ilə təyin olunan $R_{(n+1)}(x)$ funksiyasıTeylor düsturunda **Peano tipli qalıq hədd** adlanır.

Makleron düsturu. $a=0$ nöqtəsində (32) Teylor düsturu

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x) \qquad (37)$$

şəklinə düşür ki, bu düstur **Makloren düsturu** adlanır. Burada

$$M_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+....+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (38)$$

$f(x)$ funksiyasının n**-ci dərəcədən Makloren çoxhədlisi**, $R_{n+1}(x)$ isə qalıq hədd adlanır. Qalıq hədd:

1)Laqranj formada $R_{(n+1)}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$ şəkildə;

2)Peano formada $R_{(n+1)}(x)=o(x^n)$ şəkildədir.

Bəzi elementar funksiyaların Makloren düsturu ilə ayrılışı.

I. $f(x)=e^x$ funksiyasının n-ci dərəcədən Makleron çoxhədlisini yazaq.

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1$$

olduğundan, Makleron düsturuna əsasən,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \tag{39}$$

alırıq.

II. $f(x)=\sin x$ funksiyasının n-ci dərəcədən Makleron çoxhədlisini yazaq.

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & ,n \text{ cüt ədəd olduqda;}\\ (-1)^{(n-1)/2} & ,n \text{ tək ədəd olduqda}\end{cases}$$

olduğundan, Makleron düsturuna əsasən,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}) \tag{40}$$

alırıq.

III. $f(x)=\cos x$ funksiyasının n-ci dərəcədən Makleron çoxhədlisini yazaq.

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & ,n \text{ tək ədəd olduqda;}\\ (-1)^{n)/2} & ,n \text{ cüt ədəd olduqda}\end{cases}$$

olduğundan, Makleron düsturuna əsasən,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) \tag{41}$$

alırıq.

IV. α-həqiqi ədəd olduqda $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ funksiyasının n-ci dərəcədən Makleron çoxhədlisini yazaq.

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\; f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

olduğundan, Makleron düsturuna əsasən,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$$

alırıq ki, burada $R_{n+1}(x)$ qalıq həddi Laqranj formada

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1},\; 0<\theta<1$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Xüsusi halda $\alpha=n$-natural ədəd olduqda, $f^{(n+1)}(x)=0$, deməli $R_{n+1}(x)=0$ olur ki, bu halda elementar riyaziyyat kursundan məlum olan

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}x^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n$$

Nyuton binomu düsturunu almış oluruq.

§ 17. Funksiyanın artma, azalma və sabitlik əlamətləri

Funksiyanın monotonluq əlaməti. Teorem 7. $f(x)$ ***funksiyası*** $(a;b)$ ***intervalında diferensiallanandırsa və*** $(a;b)$ ***intervalında*** $f'(x)\ge 0$ ***(*** $f'(x)\le 0$ ***) qiymətlər alırsa, onda*** $f(x)$ ***funksiyası*** $(a;b)$ ***intervalında azalmır (artmır).***

İsbatı. Müəyyənlik üçün $f'(x)\ge 0$ halına baxaq.Tutaq ki, x_1 və x_2 $(a;b)$ intervalının $x_1<x_2$ şərtini ödəyən ixtiyari nöqtələridir.Onda $f(x)$ funksiyası $[x_1;x_2]$ parçasında Laqranj teoreminin bütün şərtlərini ödəyir. Onda Laqranj teoreminə əsasən,

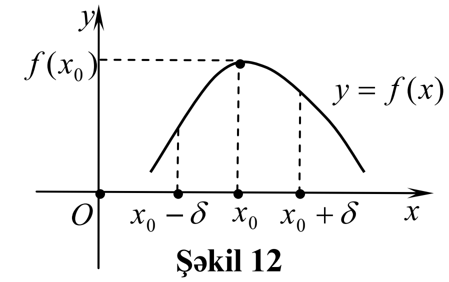
$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\;,\; c\in(x_1;x_2)$$

alırıq. Şərtə görə $f'(c)\ge 0$ və $x_2-x_1>0$ bərabərsizlikləri ödəndiyindən, $f(x_2)-f(x_1)\ge 0$ və ya $f(x_2)\ge f(x_1)$, yəni $f(x)$ funksiyası $(a;b)$ intervalında azalmayan olacaq.

Teoremin $f'(x) \geq 0$ halında isbatı analoji qayda ilə aparılır.■

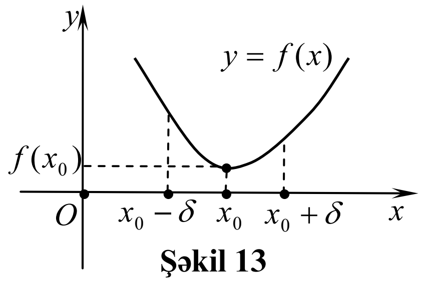
Qeyd. ***Eyni qayda ilə göstərmək olar ki,*** $f(x)$ ***funksiyası*** $(a;b)$ ***intervalında*** $f'(x) > 0$ ***(*** $f'(x) < 0$ ***) qiymətlər alırsa,*** $f(x)$ ***funksiyası*** $(a;b)$ ***intervalında artır (azalır).***

Funksiyanın lokal ekstremumları. Tərif 5. ***Əgər*** x_0 ***nöqtəsinin müəyyən*** δ ***-ətrafından olan bütün*** $x \neq x_0$ ***qiymətlərində*** $f(x) < f(x_0)$ ***(*** $f(x) > f(x_0)$ ***) bərabərsizliyi ödənərsə,*** x_0 ***nöqtəsi*** $f(x)$ ***funskiyasının ciddi lokal maksimum (minimum) nöqtəsi,*** $f(x_0)$ ***qiyməti isə*** $f(x)$ ***funksiyasının lokal maksimum (minimum) qiyməti adlanır.***



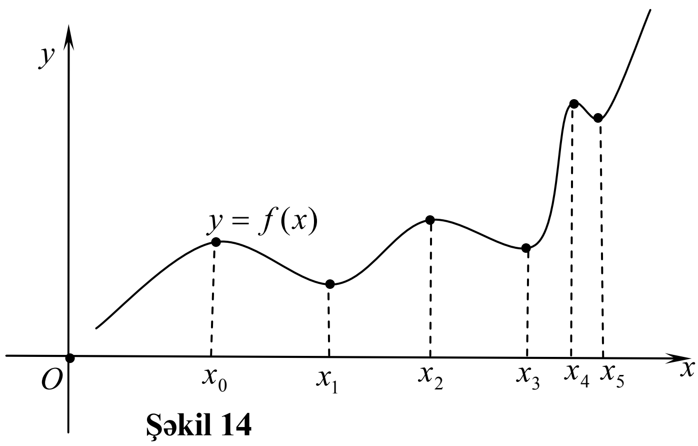
Şəkil 12

Lokal maksimum və lokal minimum nöqtələri birgə **lokal ekstremum** nöqtələri adlanırlar (şəkil 12 və şəkil 13).



Şəkil 13

Tərifdən də aydın olur ki, ekstremum anlayışı lokal xarakter daşıyır, belə ki, $f(x) < f(x_0)$ və $f(x) > f(x_0)$ bərabərsizlikləri x_0 nöqtəsinin müəyyən lokal δ-ətrafından olan nöqtələr üçün ödənir. Funksiyanın ümumiyyətlə bir neçə lokal maksimumu və minimumu ola bilər. Elə hal da ola bilər ki, funksiyanın hansısa lokal minimumu, onun loal maksimumundan böyük, lokal maksimumu, onun loal minimumundan kiçik olsun (şəkil 14).

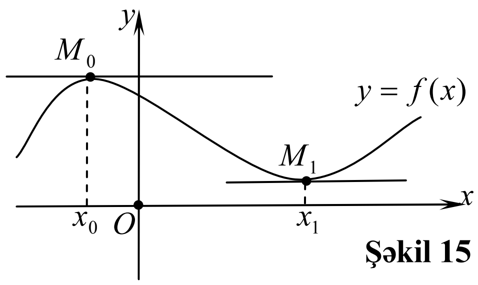


Şəkil 14

Teorem 8 (lokal ekstemumun varlığı üçün zəruri şərt). $f(x)$ ***funksiyası*** x_0 ***nöqtəsində lokal ekstremum alırsa və bu nbqtədə diferensiallanandırsa, onda*** $f'(x_0) = 0$ ***olacaq.***

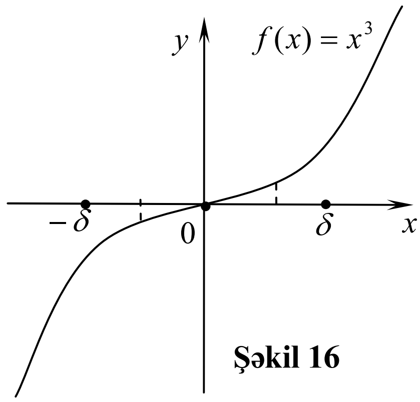
İsbatı. $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində lokal ekstremum alırsa, elə $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ varki, $f(x_0)$ qiyməti bu intervalda funksiyanın bütün başqa qiymətlərinə nəzərən ya ən böyük, ya da ən kiçik qiymət olacaq. Onda Ferma teoreminə əsasən, x_0 nöqtəsində funksiyanın törəməsi varsa, o sıfıra bərabərdir, yəni $f'(x_0)=0$ şərti ödənməlidir.■

Bu teorem həndəsi olaraq onu göstərir ki, absisi lokal ekstemumlar olan nöqtələrdə funksiyanın qrafikinə toxunanlar çəkmək olarsa, bu toxunanlar absis oxuna parallel olmalıdırlar (şəkil 15).



Şəkil 15

Qeyd edək ki, funksiyanın törəməsinin müəyyən nöqtədə sıfıra bərabər olması lokal ekstremumun varlığı üçün yalnız zəruri şərt olub, kafi şərt deyil. Belə ki, $f(x)=x^3$ funksiyasının $f'(x)=3x^2$ törəməsinin $x=0$ nöqtəsində $f'(0)=3\cdot 0^2=0$ qiyməti almasına baxmayaraq, $f(x)=x^3$ funksiyasının qrafikindən də göründüyü kimi $x=0$ nöqtəsinin istənilən ətrafında $x=0$ nöqtəsindəki qiymətdən həm kiçik, həm də böyük qiymətlər alan nöqtələr var (şəkil 16), yəni $x=0$ nöqtəsi lokal ekstremum nöqtəsi deyil.



Şəkil 16

Funksiyanın törəməsinin sıfıra bərabər olduğu nöqtələri çox zaman **stasionar nöqtələr** adlandırsalar da, biz bu nöqtələri **mümkün ekstremum nöqtələri** adlandıracağıq.

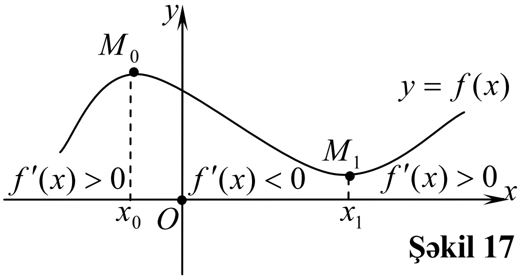
Teorem 9 (ekstremum varlığı üçün kafi şərtlər). ***Tutaq ki,*** $f(x)$ ***funksiyası*** x_0 ***nöqtəsinin müəyyən*** δ ***-ətrafında diferensiallanandır. Onda, əgər***

1) $\forall x\in(x_0-\delta; x_0)$ ***qiymətlərində*** $f'(x)>0$, $\forall x\in(x_0; x_0+\delta)$ ***qiymətlərində isə*** $f'(x)<0$ ***olarsa,*** x_0 ***nöqtəsi*** $f(x)$ ***funksiyasının lokal maksimum nöqtəsi;***

2) $\forall x\in(x_0-\delta; x_0)$ ***qiymətlərində*** $f'(x)<0$, $\forall x\in(x_0; x_0+\delta)$ ***qiymətlərində isə*** $f'(x)>0$ ***olarsa,*** x_0 ***nöqtəsi*** $f(x)$ ***funksiyasının lokal minimum nöqtəsi;***

3) istər** $\forall x \in (x_0-\delta;x_0)$**, istərsə də** $\forall x \in (x_0;x_0+\delta)$ **qiymətlərində** $f'(x)$ **eyni işarəli qiymətlər alırsa,** x_0 **nöqtəsi** $f(x)$ **funksiyasının lokal ekstemum nöqtəsi deyil.

Başqa sözlə, x dəyişəni x_0 nöqtəsindən keçdikdə $f'(x)$ törəməsi öz işarəsini "+"-dən "–"-yə dəyişdikdə, x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının lokal maksimum nöqtəsi; "–"-dən "+"-ə dəyişdikdə, x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının lokal minimum nöqtəsi; işarəsini dəyişmədikdə isə x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının lokal ekstremum nöqtəsi deyil (şəkil 17).



Şəkil 17

İsbatı. Fərz edək ki, x dəyişəni x_0 nöqtəsindən keçdikdə $f'(x)$ törəməsi öz işarəsini "+"-dən "–"-yə dəyişir. Yəni $\forall x \in (x_0-\delta;x_0)$ qiymətlərində $f'(x)>0$, $\forall x \in (x_0;x_0+\delta)$ qiymətlərində isə $f'(x)<0$ olur.

$\forall x \in (x_0-\delta;x_0)$ qiymətlərində $f'(x)>0$ olduğundan, $(x_0-\delta;x_0)$ intervalında $f(x)$ funksiyası artandır və $\forall x \in (x_0-\delta;x_0)$ qiymətlərində $f(x)<f(x_0)$ bərabərsizliyi ödənir.

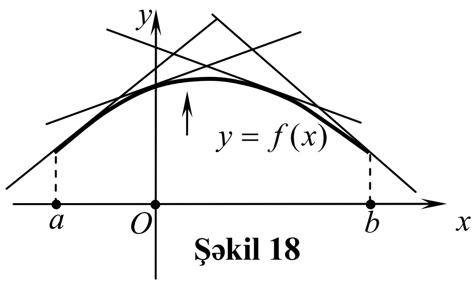
$\forall x \in (x_0;x_0+\delta)$ qiymətlərində $f'(x)<0$ olduğundan, $(x_0;x_0+\delta)$ intervalında $f(x)$ funksiyası azalandır və $\forall x \in (x_0;x_0+\delta)$ qiymətlərində $f(x)<f(x_0)$ bərabərsizliyi ödənir.

Deməli x_0 nöqtəsinin $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ ətrafından olan bütün $x \neq x_0$ nöqtələrində $f(x)<f(x_0)$ bərabərsizliyi ödənir. Yəni x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının lokal maksimum nöqtəsidir.

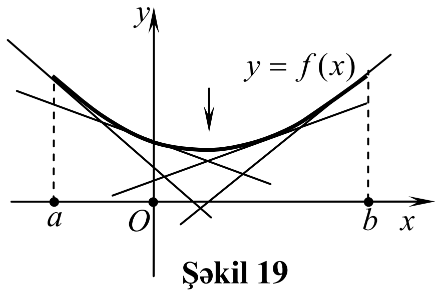
x dəyişəni x_0 nöqtəsindən keçdikdə $f'(x)$ törəməsi öz işarəsini "–"-dən "+"-ə dəyişdikdə də teorem analoji qayda ilə isbat olunur.

İndi isə fərz edək ki, x dəyişəni x_0 nöqtəsindən keçdikdə $f'(x)$ törəməsi öz işarəsini dəyişmir. Müəyyənlik üçün bu işarəni $f'(x)>0$ qəbul edək. x_0 nöqtəsinin $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ ətrafının bütün $x \neq x_0$ nöqtələrində $f'(x)>0$ olacaq. Onda $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ intervalında $f(x)$ funksiyası artandır və $x<x_0$ qiymətlərində $f(x)<f(x_0)$ bərabərsizliyi, $x>x_0$ qiymətlərində isə $f(x)>f(x_0)$ bərabərsizliyi ödənəcək.Deməli, x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının lokal ekstemum nöqtəsi deyil.■

Funksiyanın qrafikinin qabarıqlığı və çöküklüyü. Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası hər hansı $(a;b)$ intervalında diferensiallanandır, yəni bu intervalın hər bir x nöqtəsində sonlu $f'(x)$ törəməsi var. Onda $y = f(x)$ funksiyası funksiyanın qrafikinə bu qafik üzərində olan $M(x;f(x))$ nöqtəsində ($a < x < b$) toxunan çəkmək mümkündür, həm də $f'(x)$ bucaq əmsalı sonlu olduğundan, bu toxunanlar Oy ordinat oxuna paralel deyillər.



Şəkil 18



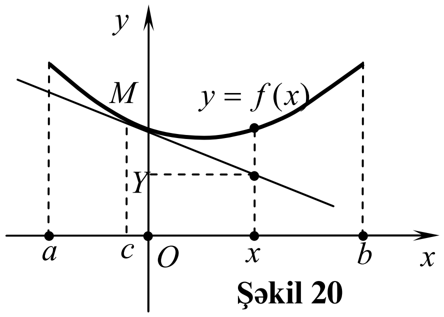
Şəkil 19

Tərif 6. ***Əgər*** $y = f(x)$ ***funksiyasının qrafiki*** $(a;b)$ ***intervalında bu qrafikə çəkilmiş istənilən toxunandan aşağıda (yuxarıda) yerləşmirsə,*** $y = f(x)$ ***funksiyasının qrafiki*** $(a;b)$ ***intervalında çökük (qabarıq) adlanır.***

Qrafiki qabarıq olan funksiyaları **qabarıqlığı yuxarıya doğru yönəlmiş**, qrafiki çökük olan funksiyaları isə **qabarıqlığı aşağıya doğru yönəlmiş** funksiyalar da adlandırırlar (şəkil 18 və şəkil 19).

Teorem 10. ***Əgər*** $y = f(x)$ ***funksiyasının*** $(a;b)$ ***intervalında ikinci tərtib törəməsi varsa və*** $(a;b)$ ***intervalının bütün nöqtələrində*** $f''(x) \geq 0$ ***(*** $f''(x) \leq 0$ ***) şərtini ödəyirsə,*** $y = f(x)$ ***funksiyasının qrafiki*** $(a;b)$ ***intervalında çökükdür (qabarıqdır).***

İsbatı. Müəyyənlik üçün $(a;b)$ intervalında $f''(x) \geq 0$ halına baxaq. $(a;b)$ intervalından ixtiyari c nöqtəsi götürək (şəkil 20). Göstərmək lazımdır ki, $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki $M(c;f(c))$ nöqtəsində funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunandan yuxarıda yerləşmir.



Şəkil 20

Bu toxunan üzərindəki nöqtələrin cari ordinatlarını Y ilə işarə edərək, onun tənləyini yazsaq,

$$Y - f(c) = f'(c)(x - c),$$

və ya

$$Y = f(c) + f'(c)(x - c) \qquad (42)$$

alarıq.

$f(x)$ funusiyasını c nöqtəsi ətrafında $n = 1$ dərəcədən Teylor düsturu ilə ayırsaq,

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2 \ , \ \xi \in (c; x) \qquad (43)$$

alarıq.(43) düsturu $(a;b)$ intervalından ixtiyari x nöqtəsi üçün doğrudur.

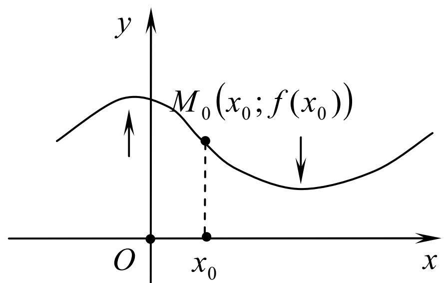
(43)bərabərliyindən (42) bərabərliyini tərəf tərəfə çıxsaq

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2 \qquad (44)$$

bərabərliyini almış oluruq. $(a;b)$ intervalının bütün x nöqtələrində $f''(x) \geq 0$ olduğundan, (44) bərabərliyinin sağ tərəfi mənfi olmayan ədəddir, yəni $(a;b)$ intervalının bütün x nöqtələrində $y - Y \geq 0$ və ya $y \geq Y$ alırıq.Bu bərabərsizlik $(a;b)$ intervalında $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin bu qrafikə çəkilmiş toxunandan aşağıda yerləşmədiyini, yəni $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin $(a;b)$ intervalında çökük olduğunu göstərir.

$(a;b)$ intervalında $f''(x) \leq 0$ halında teorem analoji üsulla isbat olunur.■

Tərif 7. $y = f(x)$ ***funksiyasının qrafikinin əyilmə nöqtəsi bu qrafik üzərində yerləşən elə*** $M_0(x_0; f(x_0))$ ***nöqtəsinə deyilir ki,*** M_0***nöqəsində*** $y = f(x)$ ***funksiyasının qrafikinə toxunan çəkmək mümkün olmaqla bərabər,*** x_0 ***nöqtəsinin müəyyən ətrafında*** x_0 ***nöqtəsindən solda və sağda*** $y = f(x)$ ***funksiyasının qrafiki müxtəlif istiqamətli qabarıqlığa malik olsun (şəkil 21).***



Şəkil 21

Teorem 11 (əyilmə nöqtəsinin varlığı üçün zəruri şərt)**.** ***Əgər*** $M_0(x_0; f(x_0))$ ***nöqtəsi*** $y = f(x)$ ***funksiyasının qrafikinin əyilmə nöqtəsidirsə və*** x_0 ***nöqtəsində*** $y = f(x)$ ***funksiyasının kəsilməz ikinci tərtib*** $f''(x)$ ***törəməsi varsa, onda bu törə-***

mə x_0 ***nöqtəsində sıfıra bərabərdir*** $f''(x_0)=0$**.**

İsbatı. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $f''(x_0)\neq 0$ şərti ödənir. $f''(x)$ funksiyası $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməz olduğundan, kəsilməz funksiyanın işarəsinin dayanıqlığı xassəsinə əsasən, x_0 nöqtəsinin elə ətrafı var ki, bu ətrafdan olan bütün x qiymətlərində $f''(x)$ funksiyasının aldığı qiymətlərin işarəsi $f''(x_0)\neq 0$ qiymətinin işarəsi ilə eyni ya $f''(x)>0$, ya da $f''(x)<0$ olacaq. Yəni x_0 nöqtəsinin göstərilən ətrafında $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki ya çökük ya da qabarıq olacaq. Bu isə $M_0(x_0;f(x_0))$ nöqtəsi $y=f(x)$ funksiyasının qrafikinin əyilmə nöqtəsi olmadığını göstərir.Bu isə teoremin şərtinə ziddir. Deməli $f''(x_0)\neq 0$ ola bilməz, $f''(x_0)=0$ şərti ödənməlidir.■

Teorem 12 (əyilmə nöqtəsinin varlığı üçün kafi şərt). ***Əgər*** $y=f(x)$ ***funksiyasının*** x_0 ***nöqtəsinin müəyyən ətrafında ikinci tərtib*** $f''(x)$ ***törəməsi varsa və göstərilən ətrafda bu törəmə*** x_0 ***nöqtəsindən solda və sağda müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda*** $M_0(x_0;f(x_0))$ ***nöqtəsi*** $y=f(x)$ ***funksiyasının qrafikinin əyilmə nöqtəsidir.***

İsbatı. x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında $y=f(x)$ funksiyasının ikinci tərtib $f''(x)$ törəməsi x_0 nöqtəsindən solda və sağda müxtəlif işarəli qiymətlər aldığından, teorem 10-a əsasən, bu ətrafda x_0 nöqtəsindən solda və sağda $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki müxtəlif istiqamətli qabarıqlığa malikdir. Bu isə, tərifə əsasən, $M_0(x_0;f(x_0))$ nöqtəsinin $y=f(x)$ funksiyasının qrafikinin əyilmə nöqtəsi olduğunu göstərir.■

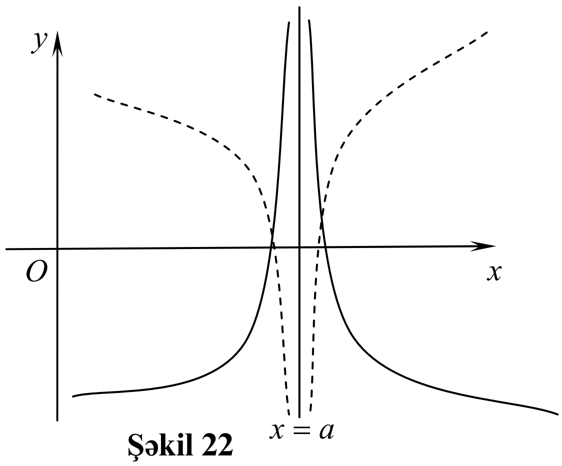
Funksiyanın qrafikinin assimptotları. İkinci növ kəsilmə nöqtələrinin ətrafında, sonsuzluqda, yəni $x\to+\infty$ və ya $x\to-\infty$ şərtlərində funksiyaları araşdırarkən funksiyaların qrafiki müəyyən bir düz xəttə sonsuz yaxınlaşır, lakin onu kəsmir. Belə düz xəttlər həmin funksiyaların **assimptotları** adlanırlar. Müstəvi üzərində düz xəttlər üç vəziyyətdə – şaquli, üfüqi və maili vəziyyətdə olduqlarından, funksiya qrafiklərinin də üç cür assimptotu - şaquli, üfüqi və maili assimptotları mövcuddur.

Tərif 8. $x=a$ ***düz xətti o halda*** $y=f(x)$ ***funksiyasının qrafikinin şaquli assimptotu adlanır ki, bu funksiyanın birtərəfli*** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ***və ya*** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ ***limitlərindən heç olmazsa biri*** $+\infty$ ***və ya*** $-\infty$***-a bərabər olsun.***

Bu halda $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində yrləşən $M(x;f(x))$ nöqəsindən $x=a$ düz xəttinə qədər olan məsafə

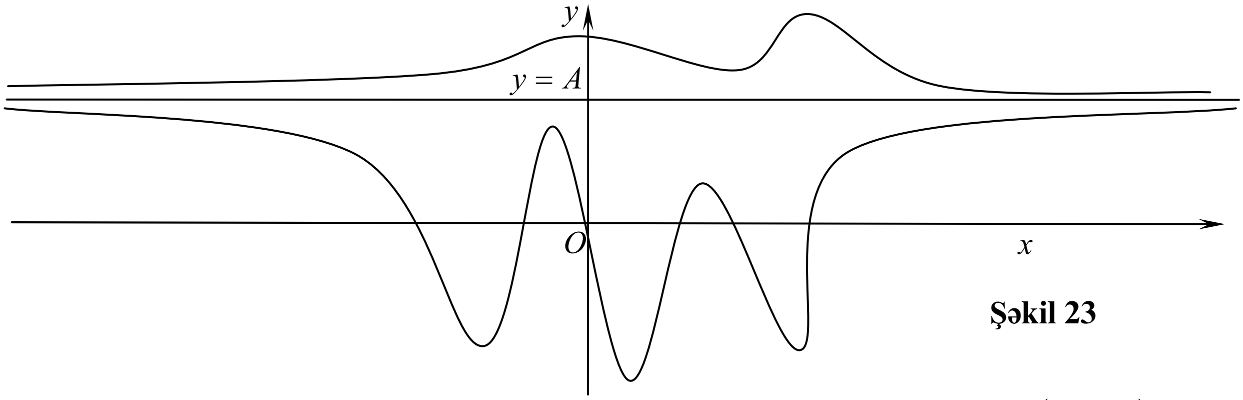
$$d=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(x))^2}=|x-a|$$

bərabərliyi ilə təyin olunduğundan, $x\to a$ şərtində $d\to 0$ olur (şəkil 22).



Şəkil 22

Tərif 9. $y=A$ ***düz xətti o halda*** $x\to+\infty$ ***(*** $x\to-\infty$ ***) şərtində*** $y=f(x)$ ***funksiyasının üfüqi assimptotu adlanır ki,*** $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A$ ***şərti ödənsin*** (şəkil 23).



Şəkil 23

Bu halda $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində yrləşən $M(x;f(x))$ nöqəsindən $y=A$ düz xəttinə qədər olan məsafə

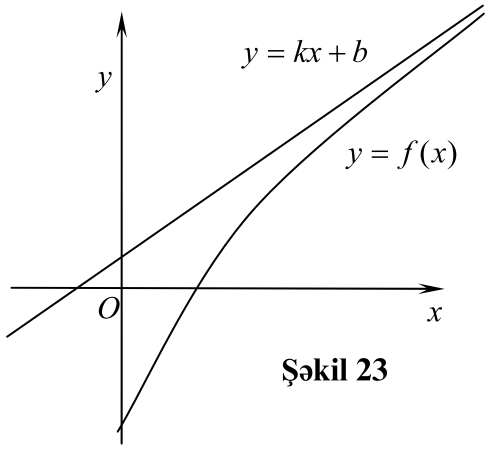
$$d=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-A)^2}=|f(x)-A|$$

bərabərliyi ilə təyin olunduğundan, $x\to\infty$ şərtində $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} d=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}|f(x)-A|=0$ olur.

Tərif 10. $y=kx+b$ ***düz xətti o halda*** $x\to+\infty$ ***(*** $x\to-\infty$ ***) şərtində*** $y=f(x)$ ***funksiyasının maili assimptotu adlanır ki,*** $f(x)$ ***funksiyasını*** $x\to+\infty$ ***(*** $x\to-\infty$ ***) şərtində***

$$f(x)=kx+b+\alpha(x) \tag{45}$$

şəklində göstərmək mümkün olsun, harda ki, $\alpha(x)$ ***funksiyası*** $x \to +\infty$ ***(*** $x \to -\infty$ ***) şərtindəkiçilən funksiyadır (şəkil 23).***



Şəkil 23

(45) bərabərsizliyinin hər iki tərəfini x-ə bölsək,

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \ ,$$

$x \to \infty$ şərtində limitə keçdikdə isə

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} k + \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x} = k + 0 + 0 = k$$

bərabərliyini alırıq.(45) ayrılışını

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$

şəkildə yazıb, $x \to \infty$ şərtində limitə keçdikdə isə

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}(b + \alpha(x)) = \lim_{x\to\infty} b + \lim_{x\to\infty}\alpha(x) = b + 0 = b$$

alırıq.

Yuxarıda qeyd etdiklərimizdən aydın olur ki, funksiyanın qrafikinin maili assimptotunu tapmaq üçün:

1) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ limitini,

və əgər bu limit sonludursa,

2) $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$ limitini hesablamaq lazımdır.

Tapılmış bu k və b ədədlərinə uyğun $y = kx + b$ düz xətti $y = f(x)$ funksiyasının maili assimptotu olacaq.

Funksiyanın azaldılması və onun qrafşkinin qurulması sxemi

Funksiyanı araşdırıb onun qrafikinin təqribi qurmaq üçün, adətən, aşağıdakı sxemdən istifadə olunur.

1) Funksiyanın təyin oblastı tapılır;

2) Funksiyanın dəyişmə oblastı tapılır;

3) Funksiyanın koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri tapılır: absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri $f(x) = 0$ tənliyindən, ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi $f(0)$ qiy-

mətindən tapılır;

4) Funksiyanın qrafikinin şaquli, üfüqü, maili assimptotları tapılır.

5). Funksiyanın artma və azalma aralıqlarımüəyyən olunur: artma aralıqları $f'(x)>0$, azalma aralıqları isə $f'(x)<0$ bərabərsizliklərinin həlli kimi tapılırlar;

6) Funksiyanın lokal ekstremum nöqtələri və qiymətləri tapılır: əvvəlcə $f'(x)=0$ tənliyindən mümkün ekstremum nöqtələri tapılır və hər bir mümkün ekstremum nöqtəsində ekstremumun varlığı üçün kafi şərtlər-birinci tərtib $f'(x)$ törəməsinin işarəsini dəyişib dəyişmədiyi yoxlanılır;

7) Funksiyanın qrafikinin qabarıqlıq çöküklük aralıqları, funksiyanın qrafikin qrafikin əyilmə nöqtələri tapılır: çöküklük aralıqları $f'(x)>0$, qabarıqlıq aralıqları isə $f'(x)<0$ bərabərsizliklərinin, əyilmə nöqtələrinin absisləri isə $f''(x)=0$ tənliyinin həlli kimi tapılırlar;

8). I-VII bəndlərdə əldə olunan məlumatlara əsasən, koordinant müstəvisində $y=f(x)$funksiyanın qrafikini təxmini qurulur.